20180409 Kom ihåg

1) X är en s.v. & $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kan vi def $Y = g(X)$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ om $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$Z \sim N(0,1)$

Sats

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ [antar alltid $\sigma > 0$ enl. def]

Bevis

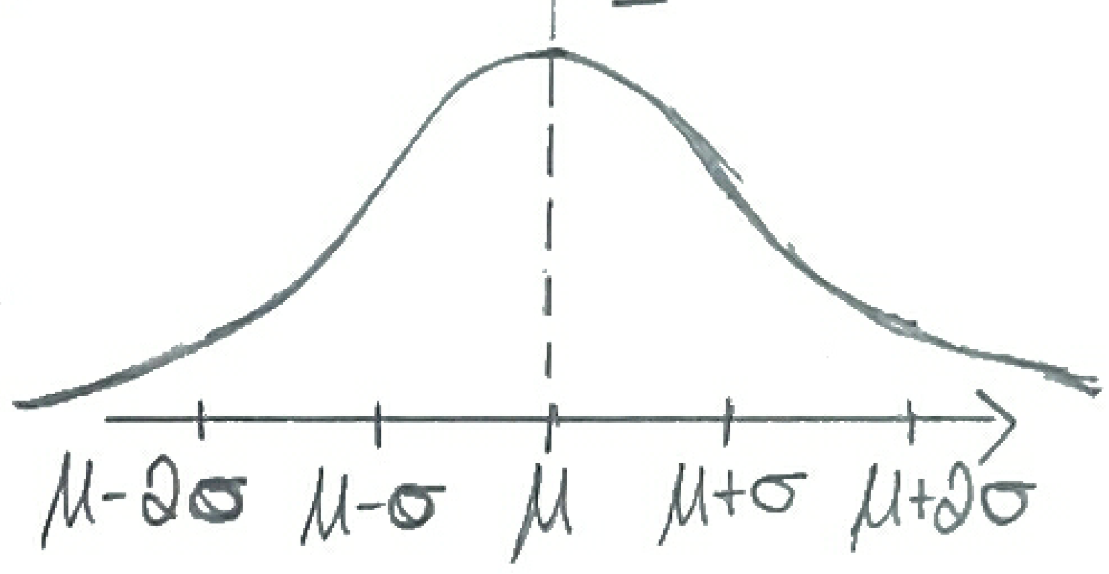
$$F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le t\right) = P(X \le \mu + \sigma t) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$= \left\{ \frac{x-\mu}{\sigma} = s \iff x = \mu + \sigma s \Rightarrow dx = \sigma ds \right\} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \sigma ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

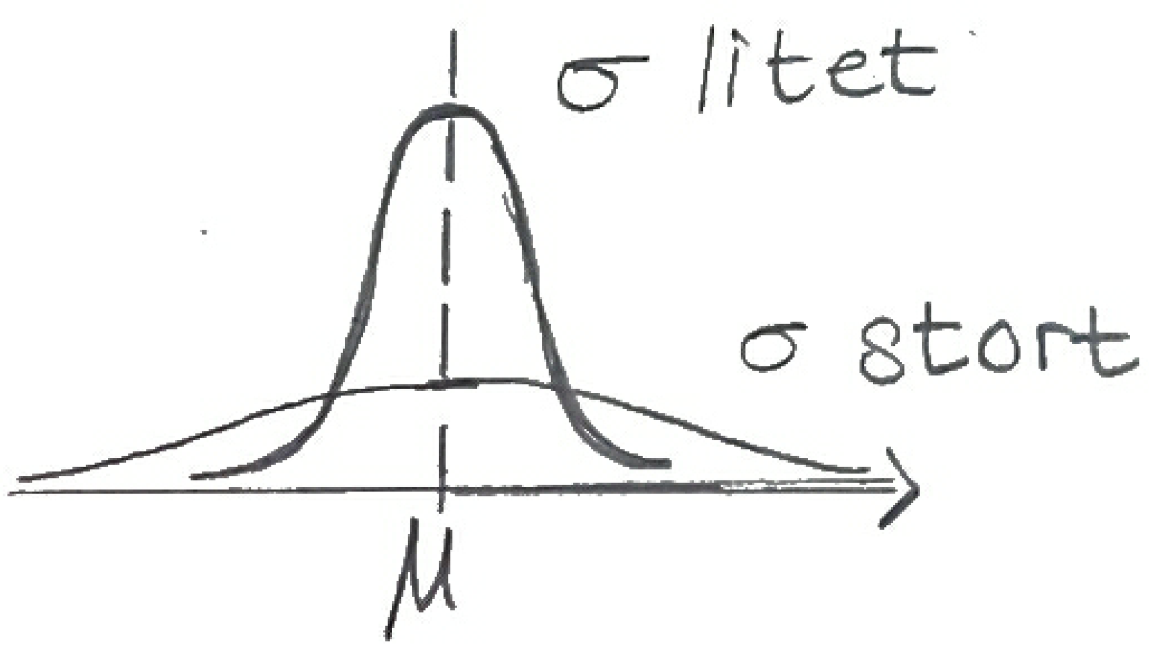
h.l. är alltså fördelningsfunk, ffkn, för en $N(0,1)$-förd. s.v. $\blacksquare$

Så här ungefär ser $f_X(t)$ ut om $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



Ofta förekommande: $P(|X-\mu| < 1.96\sigma) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le 1.96\right) \approx 0,95$

$P(|X-\mu| \le 2.58\sigma) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le 2.58\right) \approx 0,99$



Om μ ändras, translateras tfkn enbart! (grafen flyttas lång "μ-axeln")

Tal

Låt $X \sim N(1.3, 0.36)$. Vad är $P(\{0.9 \le X \le 1\} \cup \{X \ge 1.2\})$?

L: $P(\{0.9 \le X \le 1\} \cup \{X \ge 1.2\})$ (disjunkta!) $= P\left(\frac{0,9-1,3}{\sqrt{0,36}} \le \frac{X-1,3}{\sqrt{0,36}} \le \frac{1-1,3}{\sqrt{0,36}}\right) +$

$$+\mathbb{P}\left(\frac{X-1.3}{\sqrt{0.36}} \ge \frac{1.2-1.3}{\sqrt{0.36}}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \le Z \le -\frac{1}{2}\right) + \mathbb{P}\left(Z \ge -\frac{1}{6}\right)$$

där Z är $N(0,1)$.

Tabell s. A7 i boken ger: $\mathbb{P}(Z \ge -1/6) \overset{\text{symmetri}}{=} \mathbb{P}(Z \le 1/6) \approx 0.566$

$$\mathbb{P}(-2/3 \le Z \le -1/2) = \mathbb{P}(1/2 \le Z \le 2/3) = \mathbb{P}(Z \le 2/3) - \mathbb{P}(Z \le 1/2) \approx 0.747 - 0.692$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{0.9 \le X \le 1\} \cup \{X \ge 1.2\}) = 0.747 - 0.692 + 0.566 \approx 0.62 \quad //$$

Hypergeometrisk fördelning

Vi har en population med N individer. Låt p vara proportionen med en viss egenskap (t.ex. p= virussmittade; p= andelen med en viss cancertyp, etc.).

Välj ut n individer slumpmässigt & låt X=# med egenskapen

Vilken sannolikhetsfunktion (slf) har X? Vi får

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(\#\text{ sätt att välja } k \text{ ur } N\cdot p)\times(\#\text{ sätt att välja } n-k \text{ ur } N(1-p))}{\#\text{ sätt välja } n \text{ ur } N}$$

i) # sätt välja k ur $Np = \binom{Np}{k}$

ii) —//— $n-k$ ur $N(1-p) = \binom{N(1-p)}{n-k}$

iii) —//— n ur $N = \binom{N}{n}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ med begränsningar...

Def X är hypergeometriskt fördelad med parametrar N, n, p ($X \sim Hg(N,n,p)$) om

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ där $k \le n$, $k \le Np$, $k \le 0$, $k \ge n - N(1-p)$, $n \le N$

dessutom är Np ett heltal.

Anm i) detta skrivs ibland $X \sim Hg(N,n,m)$ där $m = Np$

ii) om Np & $N(1-p)$ är stort & n litet, så blir valen approx. ober.:

Säg att $N = 2 \cdot 10^7$ & $p = \frac{1}{2}$. Om vi valt en person som hade egenskapen är det nu $\frac{Np-1}{N-1} = \frac{10^7-1}{2 \cdot 10^7-1} \approx \frac{1}{2}$ som är den nya proportionen med egenskapen.

Dvs. om Np & $N(1-p)$ är stora & n är litet så blir $X \approx Bin(n,p)$.

Ex en medicinsk studie syftar till att se om aspirin hjälper förebyggande mot hjärtattack.
Man gav 11 034 st. placebo & 11 037 aspirin. Studien bestod av $N = 11\,034 + 11\,037 = 22\,071$ individer med proportionen $p = \frac{11\,034}{22\,071}$ som fick placebo.

noll-hypotes

Vi antar att aspirin ej hjälper påverkar (H_0).

Efter 10 år hade $n = 293$ fått hjärtattack, varav 189 kom från placebogruppen. Vilken slutsats kan vi dra om H_0?

Låt X vara # från placebogruppen med hjärtattack.
Under H_0 $X \sim Hg(22\,071, 293, 11\,034/22\,071)$

Vi har $P(X=189) = \ldots = 0.000\,000\,15$. Är H_0 rimligt? Beror på alla andra sanno. kan ej avgöra...

Tal Kalle spelar bridge (13 kort). Vad är sanno. att han får en hand med högst en hjärter?

L Låt X = # hjärter. Vilken fördelning har X?
N = # kort = 52, n = # kort, Kalle får 13 kort.

$p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ = prop. hjärter.

Vi har att $X \sim Hg(52, 13, 1/4)$. Efterfrågas $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \frac{\binom{Np}{0}\binom{N(1-p)}{13}}{\binom{N}{13}} + \frac{\binom{Np}{1}\binom{N(1-p)}{12}}{\binom{N}{13}} = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{12}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

20180410 Tal Kalle spelar bridge. Vad är sanno. att han får exakt 1 hjärter & 3 spader?

L Låt X_h = # hjärter & X_s = # spader.

Vi kan beräkna $P(X_h=1)$ & $P(X_s=3)$, men vad blir $P(X_h=1, X_s=3)$?
Intuitionen säger att X_h, X_s ej ober. så
$P(X_h=1, X_s=3) \neq P(X_h=1)P(X_s=3)$

Vi använder divisionsregeln:
händer med 1 hjärter, 3 spader & 9 ruter/klöver, är
$\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}$. Vi får då att

$$P(X_h=1, X_s=3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

Flerdimensionella fördelningar

En flerdim. s.v. $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ & skrivs ofta $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Diskreta fallet

Fördelningen för en diskret (flerdim.) s.v. def. av dess slf: $p_X(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

eller dess ffkn $F_X(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) =$
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$= \sum_{y_1 \leq x_1} \sum_{y_2 \leq x_2} \cdots \sum_{y_n \leq x_n} P(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n)$$

Def för en s.v. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ kallas s.v. X_1, s.v. X_2 etc. för <u>marginalerna</u> till X. Deras fördelningar kallas för <u>marginalfördelningar</u>.

Def $(X_1, \ldots, X_n)$ är ober. omm $\forall (x_1, \ldots, x_n)$
$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

Anm 1) kunde skrivit $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ &
marginalerna till $\mathbb{X}$ är ober. (men ej nödvänd.)

2) ingen av dessa två ovanstående def. kräver att $\mathbb{X}$ är diskret.

3) om $\mathbb{X}$ är diskret har vi att $\mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1) = \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbb{X}_n = x_n)$
ger marginal-slf för $\mathbb{X}_1$.

4) Antag $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ & $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \mathbb{Z}$ samt är ober.
Vi har att $\mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k, \mathbb{X}_2 = l) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k, \mathbb{X}_2 \le l) - \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k, \mathbb{X}_2 \le l-1)$
$= \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k)\mathbb{P}(\mathbb{X}_2 \le l) - \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k)\mathbb{P}(\mathbb{X}_2 \le l-1) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k)\mathbb{P}(\mathbb{X}_2 = l)$
& $\mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = k, \mathbb{X}_2 = l) = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k, \mathbb{X}_2 = l) - \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 \le k-1, \mathbb{X}_2 = l)$
$= \ldots = \mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = k)\mathbb{P}(\mathbb{X}_2 = l)$.
I allmänhet gäller att $(\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n)$ ober. $\iff$
$\mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1, \ldots, \mathbb{X}_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_k = x_k) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Betingade diskreta fördelningar

Def låt $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ vara två diskreta s.v. Den betingade slf för $\mathbb{X}$ givet $\mathbb{Y} = y$ betecknas $p_{\mathbb{X}|\mathbb{Y}}(x|y)$ & denna ges av

$$p_{\mathbb{X}|\mathbb{Y}}(x|y) = \frac{p_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}(x,y)}{p_{\mathbb{Y}}(y)} \quad \left(= \frac{\mathbb{P}(\mathbb{X} = x, \mathbb{Y} = y)}{\mathbb{P}(\mathbb{Y} = y)}\right) \text{ om } p_{\mathbb{Y}}(y) > 0$$

om ist $p_{\mathbb{Y}}(y) = 0$ låter vi $p_{\mathbb{X}|\mathbb{Y}}(x|y) = 0$

Tal i) kasta tärning & låt $\mathbb{X}$ = resultatet
ii) singla slant $\mathbb{X}$ ggr & låt $\mathbb{Y} = \#H$.
Ta fram den gemensamma slf för $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

L marginalfördelningen för $\mathbb{X}$ är $U(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$, dvs.
$\mathbb{P}(\mathbb{X} = n) = \frac{1}{6}$, $n = 1, \ldots, 6$.

Dessutom är $p_{Y|X}(k|n) = \mathbb{P}(Y=k \mid X=n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$
$= \binom{n}{k} 2^{-n}$

Vi får då att $p_{X,Y}(n,k) = \mathbb{P}(X=n, Y=k) = \mathbb{P}(Y=k \mid X=n)\mathbb{P}(X=n) =$
$= \frac{1}{6}\binom{n}{k} 2^{-n}$ för $0 \le k \le n$ & $n = 1, \dots, 6$.

Kom ihåg

Om $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ så räknar $X = \#$ lyckade försök (utav n ober.). Ofta har vi fler kategorier (bra/godkänt/dåligt) (röd/grön/gul/vit).

Antag att vi gör n ober. försök med r möjliga utfall.
Låt $X_i = \#$ försök med utfall i där $i = 1, \dots, r$, & låt p_i vara sanno. att ett visst försök har utfall i.
Antag även att dessa är samma i alla försök.
Vad är den gemensamma slf för $(X_1, \dots, X_r)$?
Dvs. vad är $\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r)$

Exp. nr.	1	2	3	4	5	...	$n-2$	$n-1$	n
Utfall	7	$r-1$	1	1	3	...	6	r	r
Sanno.	p_7	p_{r-1}	p_1	p_1	p_3	...	p_6	p_r	p_r

En fix sekvens med k_i utfall av sort i har sanno $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$
Hur många sådana sekvenser finns det?

1) vi väljer k_1 platser för utfall av typ 1 ur de n möjliga.
Detta kan göras på $\binom{n}{k_1}$ sätt.

2) det återstår nu $n-k_1$ platser & vi ska välja k_2 av dessa.
Detta kan göras på $\binom{n-k_1}{k_2}$ sätt.

3) –"– $n-k_1-k_2$ –"– välja k_3 –"– $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ sätt.

Vi får att # sekvenser blir

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)}!}\cdots 1$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \leftarrow \text{multinomialkoefficient}$$

Def $X = (X_1, \ldots, X_r)$ är multinomialfördelad m. parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ & $p_1, \ldots, p_r$ s.a. $p_i \geq 0$ $\forall i = 1, \ldots, r$ & $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ om slf ges av $p_X(k_1, \ldots, k_r) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ $\forall (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^+$ s.a. $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Vi skriver $X \sim Mn(n; p_1, \ldots, p_r)$.

Tal Yatzy Kasta 5 tärningar & låt X_i = # tärningar med resultat i. Vad är $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_3 = 3)$?

L $X = (X_1, \ldots, X_6) \sim Mn(5; 1/6, 1/6, \ldots, 1/6)$. Vi får att

$$\mathbb{P}(X_1 = 2, X_3 = 3) = \binom{5}{2, 0, 3, 0, 0, 0}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdots = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \quad //$$

Om $X = (X_1, \ldots, X_r) \sim Mn(n; p_1, \ldots, p_r)$, vilken marginalfördelning har X_1?

Vi ser utfall nr. 1 som lyckat & resterande utfall som misslyckade. Vi ser då att $X_1 \sim Bin(n, p_1)$.

Vad med $X_1 + X_2$? Vi får $X_1 + X_2 \sim Bin(n, p_1 + p_2)$

2018 04 11 Kom ihåg

1) $X=(X_1,\dots,X_n)$ är en flerdim. s.v. Vidare kallas s.v. X_1, s.v. X_2 osv. dess marginaler

2) $X_1,\dots,X_n$ är ober. omm $P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k)$ $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

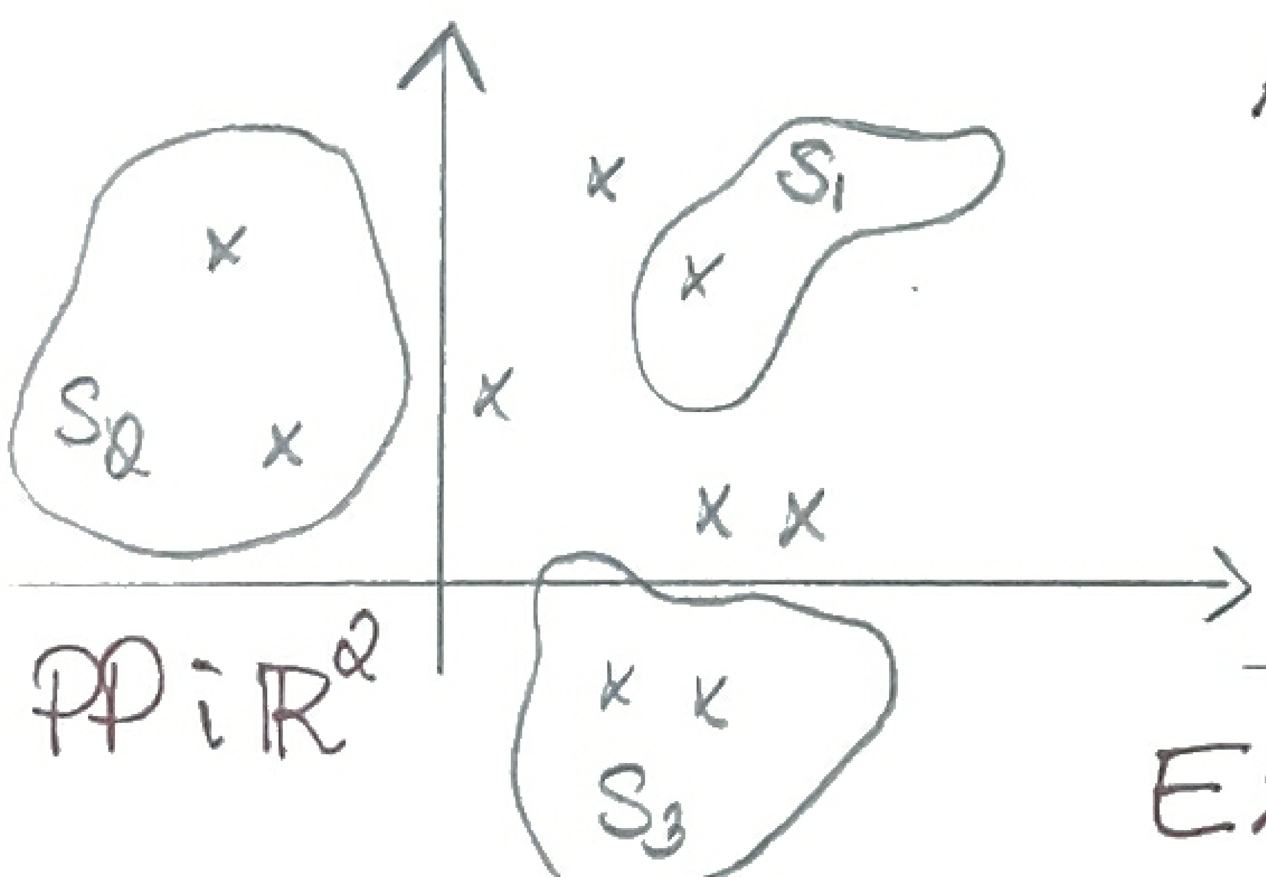
3) $X\sim Poi(\lambda)$ om $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,\dots$

Poisson-processer

En Poission-process beskriver fördelningen av slumpmässiga händelser i en mängd $S\subset\mathbb{R}^d$ (mer generella finns).
För en Poission-process (PP) gäller att om $S_1,S_2,\dots,S_n\subset S$ är disjunkta, begränsade & N_k=# händelser i S_k så är

i) $N_1,N_2,\dots,N_n$ ober s.v.

ii) $N_k\sim Poi(\lambda|S_k|)$ där $\lambda>0$ är en parameter (intensitet) & $|S_k|$ är storleken på S_k (dvs. volymen, arean, längden etc. bero. på om $d=1,2,3,\dots$)



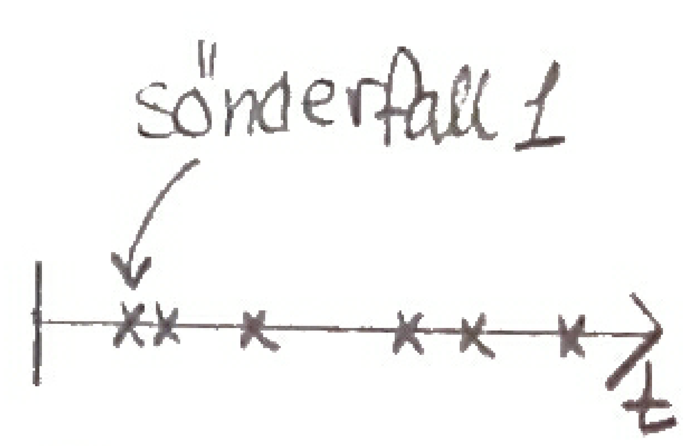
Anm: används inom astronomi/biologi/geologi/fysik/bildbehandling/telekommunikation etc.

Ex 1) stjärnornas placering i ett begr. område.

2) var träden växer i en skog

3) placering av radiosändare i en stad vid fix tidpkt

4) vid uppmätning av sönderfall i ett radioaktivt prov



Tal det bor björnar i en skog. Vid varje fix tidpkt följer placeringen av dessa approx. en PP med $\lambda=0.3$ björnar/(km)^2. Vad är sanno. att det befinner sig en björn inom 2km från Jakob?

2. Låt S = disk m radie 2 km. centrerad runt Jakob & N = # björnar i område S. Vi vet att $N \sim Po(\lambda|S|)$ där $|S| = \pi r^2 = 4\pi\ (km)^2$.

Efterfrågas $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N=0) = 1 - \frac{(\lambda|S|)^0}{0!} e^{-\lambda|S|} = 1 - e^{-\frac{12\pi}{10}}$

Flerdim. s.v. kont. fallet

En kont. s.v. $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ def av dess gemensamma tfkn $f(s_1, \ldots, s_n) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ & uppfyller att $\mathbb{P}(a_1 < X < b_1, \ldots, a_n < X_n < b_n)$
$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(s_1, \ldots, s_n) ds_n \ldots ds_1 \quad \forall\, a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$.

X kan också def. av dess ffkn $F(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(s_1, \ldots, s_n) ds_n \ldots ds_1$ $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

Def $X = (X_1, \ldots, X_n)$ är likf. fördelad på $A \subset \mathbb{R}^n$ s.a. $0 < |A| < \infty$ om

$$f(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} |A|^{-1} & \text{om } (s_1, \ldots, s_n) \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om $n=2$ & $A = [a,b] \times [c,d]$ får vi att $f(s_1, s_2) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}$ $\forall (s_1, s_2) \in A$

Återigen kallas s.v. $X_1, \ldots,$ s.v. X_n för marginalerna till $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Vi har att $f_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t, s_2, \ldots, s_n) ds_n \ldots ds_2$ är marginal-tfkn för X_1.

Vidare är $F_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, \ldots, s_n) ds_n \ldots ds_1 =$

$$= \lim_{s_2 \to \infty} \cdots \lim_{s_n \to \infty} F_X(t, s_2, \ldots, s_n)$$

Def (som innan) $X_1, \ldots, X_n$ är ober. omm.

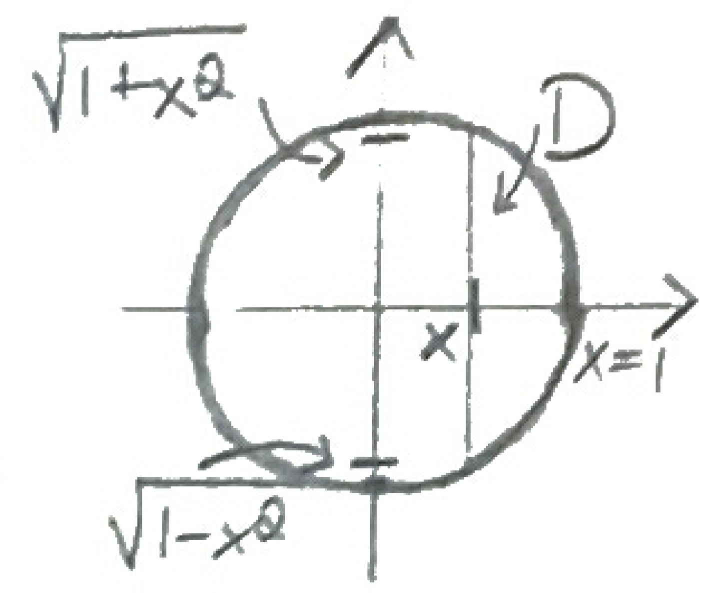
$$F_X(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t_k) \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

Anm: man kan visa att $X_1,\dots,X_n$ ober. är ekvival. med att $f_X(s_1,\dots,s_n)=\prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(s_k)$

Tal låt (X,Y) vara likf. fördelade på $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

a) hitta marginalfördelningarna för X resp. Y

b) är X, Y ober?



L Vi har att $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{|D|}=\frac{1}{\pi}$ $(x,y)\in D$

Vi får då att $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\{-1\le x\le 1\}$

$$=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \quad \text{för } -1\le x\le 1.$$

P.s.s. $f_Y(y)=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$ för $-1\le y\le 1$. Rimligt? Svar: Ja!

b) Intuitivt nej! Om Y är nära 1 $\Rightarrow$ X nära 0.

Formellt: $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\pi}\ne\frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=f_X(x)f_Y(y)$ om $(x,y)\in D$.

Def (X,Y) är bivariat normalfördelad med parametrar $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ & ρ^2 om

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Sats Marginalfördelningarna är $X\sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$ & $Y\sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$

Bevis Vi har att

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\left\{\begin{array}{l}u=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\\ v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2+v^2-2\rho uv\right]\right)dv$$

$$=\{u^2+v^2-2\rho uv=(v-\rho u)^2+u^2(1-\rho^2)\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{u^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right)dv}_{\text{tfkn för } N(\rho u,\,1-\rho^2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$