26/3 Diskreta slumpvariabler
Väntevärde & varians

Def väntevärdet av en diskret s.v. $X:\Omega\to\{x_1,x_2,\dots\}$ betecknas $\mathbb{E}[X]$ (Expectation) & ges av $\mathbb{E}[X]=\sum_{x_j} x_j\,\mathbb{P}(X=x_j)$

Om $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ def. vi $\mathbb{E}[f(X)]=\sum_{x_j} f(x_j)\,\mathbb{P}(X=x_j)$

Def variansen av en s.v. X def. som $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$

Anm. 1) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[f(X)]$, $\mathrm{Var}(X)$ etc. kan bli $\pm\infty$.

2) $\mathrm{Var}(X)$ = "förväntad kvadratisk avvikelse från väntevärdet (tyngdpunkten)"

Sats - Räkneregler för $\mathbb{E}$

Låt X, Y vara 2 diskreta s.v. & låt $a\in\mathbb{R}$, då har vi

$$\left.\begin{aligned} &\text{i) } \mathbb{E}[aX]=a\,\mathbb{E}[X] \\ &\text{ii) } \mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] \end{aligned}\right\}\text{linearitet}$$

Bevis

i) $\mathbb{E}[aX]=\sum_{x_j} a x_j\,\mathbb{P}(X=x_j)=a\sum_{x_j} x_j\,\mathbb{P}(X=x_j)=a\,\mathbb{E}[X]$

ii) Antag att $X, Y\in\mathbb{Z}$

Här kan vi ta $\Omega=\{(m,n): m,n\in\mathbb{Z}\}$. Vi skriver $\{X=m, Y=n\}=$
$=\{X=m \text{ \& } Y=n\}=\{X=m\}\cap\{Y=n\}$.

disjunkta, ty olika n

Vi har $\{X=m\}=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{X=m, Y=n\}$, s.a. $\mathbb{P}(X=m)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{X=m, Y=n\}\right)=$
$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(X=m, Y=n)$

Ex: X, Y är resultaten av 2 tärningskast

$\mathbb{P}(X=3)=\mathbb{P}(X=3, Y=1)+\mathbb{P}(X=3, Y=2)+\dots+\mathbb{P}(X=3, Y=6)$

Vi får $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X+Y=k) =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k-l+l)\,\mathbb{P}(X=k-l, Y=l) = \{m=k-l \ \& \ n=l\} =$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m+n)\,\mathbb{P}(X=m, Y=n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=m, Y=n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=m, Y=n)$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\,\mathbb{P}(X=m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ ■

Anm: 1) ett allmänt bevis är tekniskt mer jobbigt, men idén är densamma.

2) p.s.s. om $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ får vi

$\mathbb{E}[af(X) + bg(X)] = a\mathbb{E}[f(X)] + b\mathbb{E}[g(X)]$

Tal: Låt $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ vara resultaten av 100 tärningskast. Beräkna $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{100} X_k]$.

L metod 1 låt $Z = \sum_{k=1}^{100} X_k$. Beräkna $\mathbb{P}(Z=100), \mathbb{P}(Z=101), \dots, \mathbb{P}(Z=600)$ för att sedan räkna ut $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=100}^{600} k\,\mathbb{P}(Z=k)$

metod 2 vi har $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{100} X_k] = \sum_{k=1}^{100} \mathbb{E}[X_k] = 100\,\mathbb{E}[X_1] =$
$100 \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X_1=k) = 100 \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = 350.$ /

Sats Om X är en s.v. där $|\mathbb{E}[X]| < \infty$ & $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ så gäller

i) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

ii) $Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$

Bevis

i) låt $\mu = \mathbb{E}[X]$.

$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 + \mu^2 - 2X\mu] =$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\mu^2] - 2\mu\,\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] + \mu^2 - 2\mu \cdot \mu = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 =$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

ii) $Var(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])^2] =$
$= \mathbb{E}[(aX - a\mathbb{E}[X])^2] = a^2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2 Var(X)$ ■

Anm: $Var(X) \geq 0$. Om $Var(X) = 0 \iff X$ är konstant.

Några diskreta standardfördelningar

Vi gör ett experiment som kan lyckas/misslyckas, med sannolikhet p resp. $1-p$. Låt $X=1$ om lyckas, annars 0.
S.v. X är då Bernoulli-fördelad m parameter p. ($X \sim Be(p)$).
Vi har $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) = p$ //

Tal antag att vi gör n oberoende försök, där varje försök lyckas m.s. p (& annars misslyckas). Låt $X = \#$lyckade försök. Bestäm slf för X ($\equiv$ bestäm fördelningen)

$\mathcal{L}$ Vi ska beräkna $\mathbb{P}(X=k)\ \forall k$. Har att $\mathbb{P}(X=k) = (\#$ försöks-sekvenser med exakt k lyckade försök$) \times ($sanno. för en fix sekvens med exakt k lyckade försök$) = A \cdot B$.

Försök nr.	1	2	3	4 ...	n-1	n
exakt $\overrightarrow{k}$ lyckade	L	m	m	L	L	m
sanno för denna sekv.	p	$1-p$	$1-p$	p	p	$1-p$

L = lyckade
m = misslyckade

dvs. $B = p^k(1-p)^{n-k}$. Vi får att $A = \binom{n}{k} = \#$sätt välja k ur n.
$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$ //

Def en s.v. X är Binomialfördelad med parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ & $0<p<1$. ($X \sim Bin(n,p)$) om $\mathbb{P}(X) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$

Tal låt $X \sim Bin(n,p)$, beräkna $\mathbb{E}[X]$

$\mathcal{L}$ metod 1 $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \ldots$ räkna som en galning... $= ?$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(7/2) - 2\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\,\frac{5}{2}\,\Gamma(5/2) - 2\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) =$$

$$= \frac{3}{4}\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) = \frac{-1}{8}\Gamma(3/2) = \frac{-1}{8}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fourier!

$$c_0 = (\sqrt{x}, 1)_w = \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\,dx = \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$P(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-x) - \frac{\sqrt{\pi}}{16}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)$$

---

metod 2 låt $X_k = \begin{cases} 1 & \text{om exp. nr } k \text{ lyckas} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n =$ # lyckade försök

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = n\,\mathbb{E}[X_1] = np$ //

2018 03 27 Fler standardfördelningar

Ofta har vi i fallet $\mathrm{Bin}(n,p)$ n mkt stort, p mkt litet

Tal radioaktivt prov med $n = 10^{20}$ klyvbara atomkärnor. Under en sekund är sanno. att en fix kärna sönderfaller $3\cdot 10^{-19}$. Vad är sanno. att högst 5 kärnor sönderfaller under en sekund? Antag ej kedjereaktion.

L låt $X = \#$ sönderfall under en fix sekund. Vet att $X \sim \mathrm{Bin}(10^{20}, 3\cdot 10^{-19})$. Vi söker $\mathbb{P}(X\le 5) = (1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}} + 10^{20}(1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}-1}\cdot 3\cdot 10^{-19} + \ldots$ korrekt men krångligt!

Def X är Poission-fördelad med parameter $\lambda>0$ ($X\sim \mathrm{Poi}(\lambda)$) om $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$ (0 för alla andra värden på k)

Anm: $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k/k!\, e^{-\lambda} = e^{\lambda}e^{-\lambda} = 1$

Sats Om $X_n \sim \mathrm{Bin}(n,p_n)$ där $np_n\to\lambda$, $n\to\infty$ så gäller $\forall k$
$\mathbb{P}(X_n=k)\to\mathbb{P}(X=k)$, $n\to\infty$ där $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$

Bevis Fixera k.

$$\mathbb{P}(X_n=k) = \binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!\,n^k}(np_n)^k(1-p_n)^{n-k}$$

1) $(np_n)^k\to\lambda^k$

2) $(1-p_n)^{n-k}\to e^{-\lambda}$ $\quad\boxed{(1+a_n)^{b_n}\to e^c \text{ om } a_nb_n\to c \ \&\ a_n\to 0}$

3) $\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\to 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X_n=k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ∎

L (alt.) Vi antar $X\sim\mathrm{Poi}(\lambda)$ där $\lambda = np$ (en approx.) $\lambda = 30$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X\le 5) = e^{-30} + 30e^{-30} + \frac{30^2}{2!}e^{-30}\ldots$

Tal Emilia skjuter straffar. Varje straff träffar ober. m.s. p. Låt $X = \#$försök som hon behöver t.o.m. första träffen. Hitta slf för X.

L $\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ missar}} \underbrace{p}_{\text{träff}} \quad k=1,2,3,\ldots$

Def X är geometriskt fördelad m. parameter p, $0<p<1$, ($X \sim geom(p)$) om $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p \quad k=1,2,3$

OBS! Det kan variera!

Tal Som ovan men $X = \#$försök t.o.m. träff nr. r.

L om $X=k$ måste straff nr. k vara träff nr. r. Dessutom måste $r-1$ av de föregående $n-1$ straffarna vara träffar. En fix sekvens med $r-1$ träffar & $(k-1)-(r-1)=k-r$ bommar har sanno. $p^{r-1}(1-p)^{k-r}$. Vi får då $\mathbb{P}(X=k) = (\#\text{sekvenser})\cdot$ $\cdot$(sanno. för en fix sådan sekv.)$\cdot$(sanno. sista träff) =

$$= \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

Def X är neg. binomialförd. m. param r, p ($X \sim NegBin(r,p)$) om $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

Kontinuerliga slumpvariabler

Def en s.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ kallas kont. om $\exists f: \mathbb{R} \to [0,\infty): \forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

Anm: 1) funk. $f(s)$ kallas täthetsfunktionen (tfk, pdf = probability density function) & $F(t) := \mathbb{P}(X \le t)$ är fördelningsfunktionen

2) Vi har $F'(t) = f(t)$ & $\mathbb{P}(t \le X \le t+h) =$
$= F(t+h) - F(t) \approx hF'(t) = hf(t)$

3) $f(t)$ alt. $F(t)$ anger/bestämmer fördelningen för motsvarande kont. s.v.

4) Vi har alltid att $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = 1$ ty $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(-\infty < \Omega < \infty)$.

5) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 0$ & $\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 1$.

Dessutom gäller för $h \ge 0$ $F(h+t) - F(t) = \int_{t}^{t+h} f(s)\,ds \ge 0$.
$\Rightarrow F(t)$ är icke-avtagande.

6) Vi har att $\mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(\{X < b\} \setminus \{X < a\}) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X < a) =$
$= \int_{-\infty}^{b} f(s)\,ds - \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds = \int_{a}^{b} f(s)\,ds$ om $a < b$

7) $\mathbb{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f(s)\,ds = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X \le a)$.

Def om X har funken $f(s)$ def. vi väntevärdet ($\mathbb{E}[X]$) av X genom $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s)\,ds$.

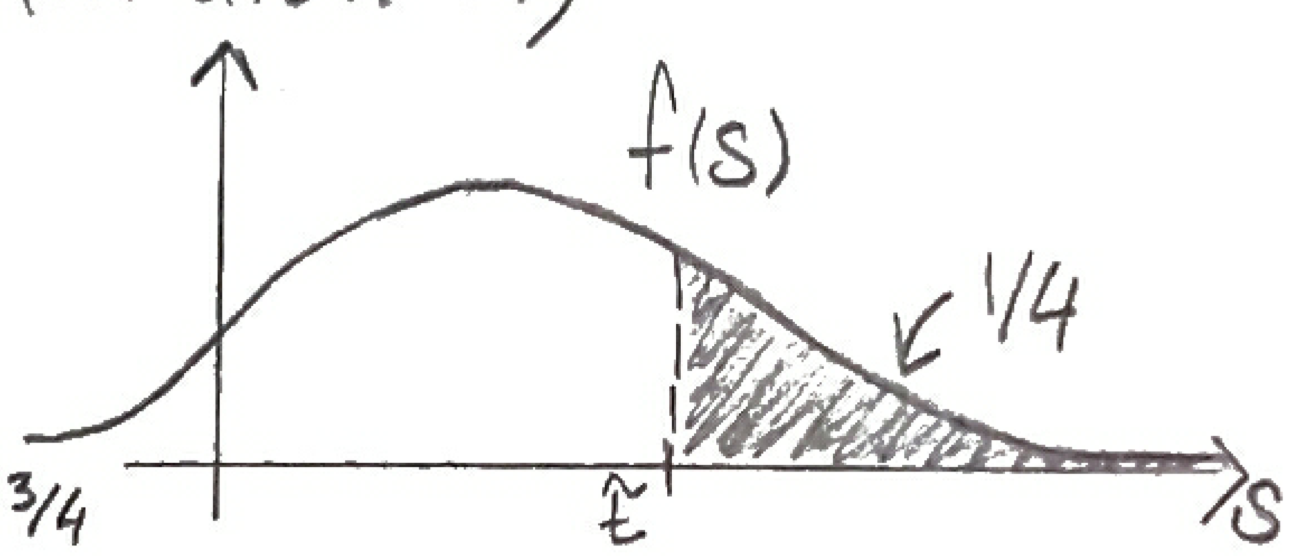
Om $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def vi $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(s)\,ds$.

Variansen ($Var(X)$) def. av $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \mathbb{E}[X])^2 f(s)\,ds$

Som för diskreta s.v.
i) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
ii) $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$
iii) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Def för $0 < \alpha < 1$ def α-kvantiteten t_α som lösningen till $F(t_{1/2}) = 1 - 1/2$.

Ex: $t_{1/2}$: $\mathbb{P}(X \le t_{1/2}) = \mathbb{P}(X \ge t_{1/2}) = 1/2$ (medianen)
$t_{1/4}$: övre kvartilen
$t_{3/4}$: undre kvartilen
$\mathbb{P}(X \le \tilde{t}) = 3/4 = 1 - 1/4 \Rightarrow \tilde{t} = t_{3/4}$



28/3 Def. en s.v. X är exponentialfördelad med parametern $\lambda>0$ ($X \sim Exp(\lambda)$) om $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$

Anm: $f(t)=0$ för $t\leq 0$, underförstått!

Användning: låt T = tiden för en kol-14 atom att sönderfalla. Då är $T\sim Exp(\lambda)$

Tal: hitta $t_{1/2}$ för $T\sim Exp(\lambda)$

L: $$\frac{1}{2}=F(t_{1/2})=\int_{-\infty}^{t_{1/2}} f(s)\,ds=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(s)\,ds}_{=0}+\int_0^{t_{1/2}} f(s)\,ds=\int_0^{t_{1/2}}\lambda e^{-\lambda s}\,ds$$ ← def. område viktigt!

$$=\left[-e^{-\lambda s}\right]_0^{t_{1/2}}=1-e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}}=1/2 \Rightarrow -\lambda t_{1/2}=\log 1/2=-\log 2 \Rightarrow t_{1/2}=\frac{\log 2}{\lambda} \quad //$$

Tal: en sönderfallstid $T\sim Exp(\lambda)$. Vilken är den förväntade livslängden?

L: söker $E[T]$, har $$E[T]=\int_{-\infty}^{\infty} s f(s)\,ds=\int_0^{\infty} s\lambda e^{-\lambda s}\,ds=\left[-se^{-\lambda s}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}\,ds=$$

$$=0+\left[-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda} \quad //$$

Funktioner av slumpvariabler

Om X är en s.v. & $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kan vi def. en ny s.v. $Y=g(X)$.

Om X har känd fördelning (slf, tfkn, ffkn), vilken fördelning har då Y?

standardfel!

Då X har **tfkn** $f_X(s)$ har Y tfkn $\cancel{f_Y(s)=g(f_X(s))}$ inte sant ty

i) om $g\equiv 0 \Rightarrow Y\equiv 0$, $g(f_X(s))=0$

ii) om $g<0$, då blir $g(f_X(s))<0$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(f_X(s))\,ds\neq 1$

Ist går vi via ffkn

$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(g(X) \le t) \text{ "=" } \mathbb{P}(X \le g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t))$

Vi får sedan att $f_Y(t) = F_Y'(t)$.

Tal låt $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Bestäm fördelningen för X/r där $r>0$.

L $F_{X/r}(t) = \mathbb{P}(\frac{X}{r} \le t) = \mathbb{P}(X \le rt) = F_X(rt)$.

Vidare är $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^t = 1-e^{-\lambda t}$ $t>0$.

$\Rightarrow F_{X/r}(t) = F_X(rt) = 1-e^{-\lambda rt}$ $t>0$

$\Rightarrow f_{X/r}(t) = F_{X/r}'(t) = \lambda r e^{-\lambda rt}$ $t>0$

$\Rightarrow X/r \sim \mathrm{Exp}(\lambda r)$ //

Def X är likformigt fördelad på intervallet $[a,b]$ där $a<b$ ($X \sim U[a,b]$) om $f(s) = \frac{1}{b-a}$ för $s \in [a,b]$

Def låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara någon mängd. Den diskreta s.v. X är likformigt fördelad på mängden A om $\mathbb{P}(X = a_k) = \frac{1}{|A|}$ $k = 1,2,\dots,n$, skriver $X \sim U(A)$

Tal låt $X \sim U[-1,1]$. Vilken tfkn har X^2?

L vi har att $X^2 \ge 0 \Rightarrow f_{X^2}(t) = 0$ för $t<0$.

För $0 \le t \le 1$ har vi att $F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) =$

$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s)\,ds = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{2}\,ds = \sqrt{t}$

$\Rightarrow f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $0 \le t \le 1$.

Slutligen för $t>1 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 1 \Rightarrow f_{X^2}(t) = 0$ för $t>1$.

Svar: $f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $0 \le t \le 1$.

Följande satser är användbara för att generera s.v. med önskad ffkn. Här antas F vara strikt växande på sitt def.-område

Sats Om X har ffkn $F(t)$ & $Z = F(X)$, då är $Z \sim U[0,1]$.

Bevis $P(Z \leq z) = P(F(X) \leq z) = P(X \leq F^{-1}(z)) = F(F^{-1}(z)) = z$ för $0 \leq z \leq 1$. Så $F_Z(z) = z$, så $Z \sim U[0,1]$ (kolla övning) ■

Sats låt $U \sim U[0,1]$ & låt $X = F^{-1}(U)$. Då har X ffkn $F(t)$.

Bevis $P(X \leq t) = P(F^{-1}(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) \underset{\text{ty } U \sim U[0,1]}{=} F(t)$ ■

Tal låt $U \sim U[0,1]$. Hitta lämplig funk. g s.a. om $g(U) = X$ $\Rightarrow X \sim Exp(\lambda)$.

L enl. satsen ovan skall vi ta $g = F^{-1}$ där F är ffkn för en $Exp(\lambda)$-fördelad s.v. Om $Y \sim Exp(\lambda)$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(s)ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t} \quad t > 0.$$

ln, ej $\log_{10}$

Om $y = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = 1 - y \Rightarrow -\lambda t = \log(1-y) \Rightarrow t = \frac{\log(1-y)}{-\lambda} = F^{-1}(y)$

Därmed får vi att $X = F^{-1}(U) = \frac{\log(1-U)}{\lambda}$ //

Normalfördelningen

Def en s.v. X är normal fördelad med parametrar $\mu \in \mathbb{R}$ & σ^2 $(\sigma > 0)$ $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$, $f_X(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \mathbb{R}$

Anm: Om $\mu = 0$ & $\sigma^2 = 1$ skriver vi $Z \sim N(0,1)$ & Z sägs vara en <u>standardiserad</u> normalfördelad s.v.

Man skriver ofta $\phi(t)$ för tfkn $f_Z(t)$ & $\Phi(t) = F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(s)ds = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$.

Om $X \sim N(2,3)$ då blir $\mathbb{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(s-2)^2}{6}} ds.$

Svår/omöjlig att lösa för hand? Ist används tabell.
Tabell finns bara för $N(0,1)$.

28/3 Vecka 2 Sannolikhetsfördelningar

Bernoulli försök

Ett slumpexperiment som antingen lyckas med sanno. p eller misslyckas med sanno. $1-p$.

Täthetsfunktion

Om $f(x) > 0 \ \forall x$ & $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, så är f en täthetsfunk. som beskriver en sannolikhetsfördelning.

Det gäller att $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ om X har fördelning som beskrivs av f.

Fördelningsfunktion

Ett annat sätt att beskriva en sannolikhetsfördelning.

Om $F(x)$ är en fördelningsfunk. gäller

- $F(x)$ är monotont ökande (ej strikt)
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $P(X \leq a) = F_X(a)$
- $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

Väntevärde

Kan förstås som genomsnittet av oändligt många utfall

diskreta stokastiska variabler $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\,p(x)$

kontinuerliga —//— $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

Varians

Mäter hur mkt en s.v. varierar kring sitt väntevärde.

Standardavvikelsen ger väntevärdet för avståndet till X från $E(X)$

$Var(X) = E((X - E(x))^2) = E(x^2) - E(x)^2$

2.11 $X \sim Bin(n,p)$, dvs X är binomialfördelad med n försök & sanno. p för lyckat försök. Ange typvärde (mode) för X, dvs. ange k som maximerar $P(X=k)$. Tips: använd kvoten för på varandra följande k

L för $k <$ typvärde är sanno ökande i k, alltså är $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} > 1$ för dessa k

$\Rightarrow$ typvärdet är det minsta k s.a. $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \leq 1$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(n-k)!\,k!}{(n-k-1)!(k+1)!} p(1-p)^{-1} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-k-1)!\,k!}{(n-k-1)!(k+1)\,k!} \frac{p}{1-p} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} \leq 1 \iff np - kp \leq k - kp + 1 - p$$

$\iff k \geq np - 1 + p = p(n+1) - 1$ runda upp runda ned

$\Rightarrow$ typvärdet är $\lceil p(n+1) - 1 \rceil = \lfloor p(n+1) \rfloor$

2.21 X är geometriskt fördelad. Visa att $P(X > n+k-1 \mid X > n-1) = P(X > k)$. Förklara varför resultatet följer av konstruktion av den geometriska fördelningen från ober. Bernoulli-försök

L Geometrisk fördelning: X är antalet ober. Bernoulli-försök upp tom. det första lyckade försöket.

$\Rightarrow P(X > k) = (1-p)^k =$ sanno. att k försök i rad misslyckas. Kan visas med slf.

$$P(X=m) = (1-p)^{m-1} p \Rightarrow P(X>k) = \sum_{m=k+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^{m+k} p =$$

$$= (1-p)^k P(X>0) = (1-p)^k$$

$$P(X>n+k-1 \mid X>n-1) = \frac{P(X>n+k-1 \cap X>n+1)}{P(X>n-1)} =$$

$$= \frac{P(X>n+k-1)}{P(X>n-1)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n-1}} = (1-p)^k = P(X>k)$$

Förklaring: försöken är ober. så vetskap om att vi misslyckas $n-1$ ggr påverkar ej sanno. att de följande k försöken misslyckas.

2.34 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \quad -1 \le \alpha \le 1$

a) Visa att $f(x)$ är en täthetsfunktion,

L dvs. visa att $f(x) \ge 0 \ \forall x$ & $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

$f(x) \ge 0 \iff \alpha x \ge -1 \iff \min_{\alpha, x} \alpha x \ge -1.$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+\alpha x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 1$

b) Ange fördelningsfunktionen.

L $-1 \le x \le 1$: $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1+\alpha y}{2}\,dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{\alpha y^2}{4}\right]_{-1}^{x} = \frac{x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha}{4}$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ (\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha)/4, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Ange medianvärdet

L x medianvärde $\iff F(x) = 1/2 = \frac{\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha}{4}$

$\alpha = 0 \Rightarrow x = 0$

$\alpha \ne 0 \Rightarrow 0 = x^2 + \frac{2x}{\alpha} - 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$

$-1 \le x \le 1$, $\left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$ om $\alpha > 0$, $x = \frac{-1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$ om $\alpha < 0$.

d) Ange kvartilerna

L som i c) men $F(x) = 1/4$ resp. $F(x) = 3/4$

4.2 X har fördelningsfunk. $F(x)=1-x^{-\alpha},\ x\geq 1$

a) Ange $E(X)$ för de α för vilka $E(X)$ existerar

L $f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}(1-x^{-\alpha})=\alpha x^{-\alpha-1}$

$E(X)=\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \alpha x^{-\alpha-1}dx=$ om $\alpha=1$: $[\ln x]_1^\infty=\infty$

$\alpha\neq 1$: $\left[\frac{\alpha x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty=\begin{cases}\infty & \alpha<1\\ \frac{-\alpha}{\alpha-1} & \alpha>1\end{cases}$

$\Rightarrow E(X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ om $\alpha>1$

Existerar ej annars!

b) Ange $Var(X)$ för de α för vilka $Var(X)$ existerar

L $Var(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-E(X)^2$.

$E(X^2)=\int_1^\infty x^2\alpha x^{-\alpha-1}dx=\int_1^\infty \alpha x^{-\alpha+1}dx=$

om $\alpha\leq 2$: $E(X^2)=\infty$ som innan

om $\alpha>2$: $\left[\frac{\alpha x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^\infty=-\frac{\alpha}{2-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-2}$

$Var(X)=\frac{\alpha}{\alpha-2}-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2=\ldots=\frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ om $\alpha>2$, annars ej def.

4.26 En stav m längd L bryts i 2 delar. Ange väntevärdet för kvoten mellan den längre & den kortare delen. Slumpmässig placering av brottet.

L Antag att alla platser för brottet är lika sannolika.

Låt X vara längden för den längre delen $\Rightarrow X=U[1/2,1]$.

Låt $Z=\frac{X}{1-X}$ vara kvoten vi är intresserade av.

Vi behöver veta fördelningen för Z, den ges t.ex. av fördelningsfunk. för Z, $F_Z(z)$

$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P\left(\frac{X}{1-X}\leq z\right)=P\left(X\leq\frac{z}{1+z}\right)=F_X\left(\frac{z}{1+z}\right)$

$\Rightarrow f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_X\left(\frac{z}{1+z}\right)=f_X\left(\frac{z}{1+z}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z}\right)=f_X\left(\frac{z}{1+z}\right)\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{2}{(1+z)^2}$

ty $f_X(x)=2$ för $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

$$\Rightarrow E(Z) = \int_1^\infty \frac{2z}{(1+z)^2}\,dz \overset{\text{I.B.P.}}{=} \left[\int (1+z)^{-2}\,dz = \left[-1(1+z)^{-1}\right] = \frac{-1}{1+z} \right]$$

$$= 2\left[z\left(-\frac{1}{1+z}\right) - \int -\frac{dz}{1+z} \right]_1^\infty = 2\left[\underset{\searrow -1/2}{\overset{\nearrow -1}{-\frac{z}{1+z}}} + \underset{\searrow \ln 2}{\overset{\nearrow \infty}{\ln(1+z)}} \right]_1^\infty = \infty$$

$\Rightarrow$ *Väntevärdet existerar ej!*