

MATEMATISK STATISTIK

19/3

Erik Broman, broman@chalmers.se

Sannolikhets teori (LV1-5)

- i) "regler för hur vi ska modellera/räkna med slumpen
- ii) utveckla matematiska modeller för slumpmässiga problem

Statistik (LV6-9)

- i) dra slutsatser från data
- ii) testa hypoteser

Sannolikhets teori

vår modell:

- i) utfallsrummet $\Omega = \{\text{alla möjliga utfall av vår experiment}\}$.
- ii) ett element $\omega \in \Omega$ är ett specifikt utfall.
- iii) en händelse A är en samling utfall & utgör en delmängd av Ω .
- iv) en funktion $P: A \subseteq \Omega \rightarrow [0, 1]$ som vi tolkar som sannolikheten för A .

Ex: kastar 6-sidig tärning

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, händelse $A = \{1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ (udda tal)

Funktionen P kallas för ett sannolikhetsmått & uppfyller alltid följande axiom:

1) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq \Omega$

2) $P(\Omega) = 1$

3) om A & B är disjunkta, då gäller att $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Om $A_1, A_2, A_3, \dots$ är disjunkta, så gäller att

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Kom ihåg:

i) $A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ \& } w \in B\}$

ii) $A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ \&/eller } w \in B\}$

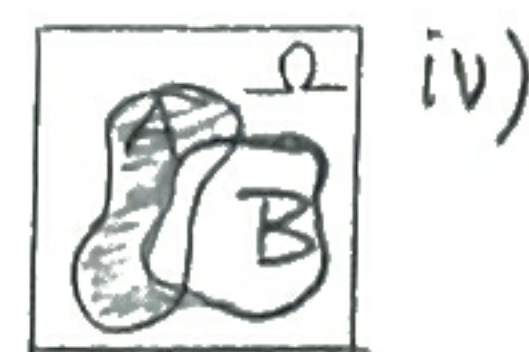
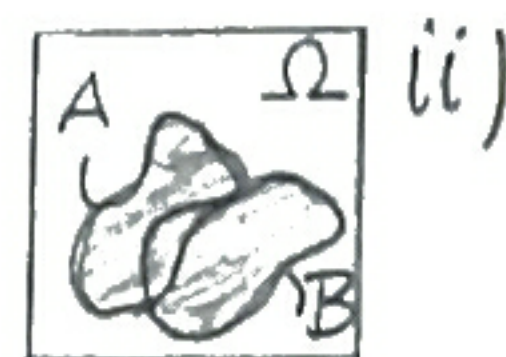
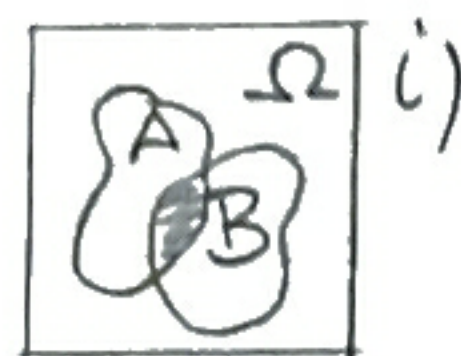
iii) $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$

iv) $A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A, w \notin B\}$

$\bar{A}$ skriver

v) $A \subset B$ om $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$

vi) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \text{ \& } B \text{ är disjunkta}$



Sats (räkneregler för $\mathbb{P}$)

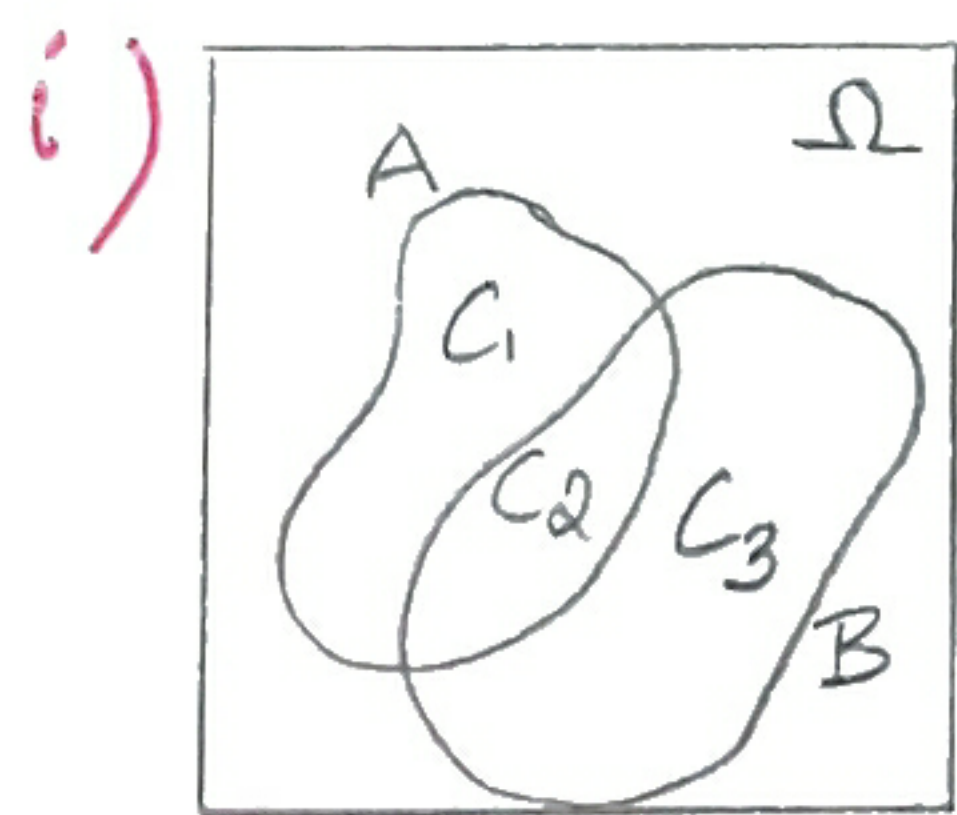
$\forall A, B \subset \Omega$ gäller

i) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Bevis



$C_1 = A \setminus B$, $C_2 = A \cap B$, $C_3 = B \setminus A$, dessa är disjunkta
& $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$$\begin{aligned} \text{Vi får } \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + \mathbb{P}(C_2) = \\ &\stackrel{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_2) \stackrel{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_2 \cup C_3) = \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

ii) $A \cup A^c = \Omega$

$$\stackrel{\text{ax 2}}{=} \mathbb{P}(\Omega) \stackrel{\text{ax 3}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

iii) om $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \stackrel{\text{ax 3}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \stackrel{\text{ax 1: } \geq 0}{\geq} \mathbb{P}(A)$$



Divisionsregeln: om alla utfall i Ω är lika sannolika så gäller $P(A) = \frac{\# \text{utfall i } A}{\# \text{utfall i } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} \leftarrow \text{storleken av}$

Tal: 5 familjer har 2 barn vardera

Familj nr.	1	2	3	4	5
	$\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} f \\ f \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}$

a) välj familj slumpmässigt & låt $A = \{\text{den valda familjen har två flickor}\}$

b) välj en flicka slumpmässigt & låt $B = \{\text{den valda flickans familj har 2 flickor}\}$.

Lösning

$$a) P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{5} \quad b) P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{7} //$$

Lite kombinatorik

Ett experiment genomförs i k steg.

Låt $N_k = \# \text{möjliga utfall i steg } k$.

Vi får då att $|\Omega| = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$

Låt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vara en mängd.

En permutation av A är ett ordnat arrangemang (dvs en lista) av objekten $a_1, \dots, a_n$.

Ex: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, perm: $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2)$ osv.

I) på hur många sätt kan vi permutera A ?

$$n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n! \quad (\text{dvs } N_1 = n, N_2 = n-1, \text{ osv})$$

II) på hur många sätt kan vi välja k objekt ($k \leq n$) i A & lägga i ordning (dvs. hur många listor av längd k kan vi skapa)?

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

III på hur många sätt kan vi välja k av objekten

i A om vi ej tar hänsyn till ordningen?

(Vi säger att vi kombinerar de k objekten).

Enl II) är # listor av längd $k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

En specifik lista $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ (k objekt) kan permuteras på $k!$ olika sätt. Alla dessa permutationer innehåller samma k objekt.

$$\Rightarrow \# \text{ kombinationer} = \frac{\# \text{ listor}}{\# \text{ permutationer}} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$ kallas binomial koeff. "n choose k"

Tal: en löpartävling har 52 deltagare. På hur många sätt kan topp-5 listan se ut?

$$L: 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!} //$$

Tal: hur många pokerhänder finns det?

$$L: \text{vi väljer 5 objekt ur en samling av 52, så blir svaret } \binom{52}{5} //$$

20/3 Betingade sannolikheter

Ex: vid en fartkontroll är hast. begr. 50 km/h. 32% av alla bilar kör fortare än 50 km/h & 4% av alla bilar kör fortare än 70 km/h. Vad är andelen fortkörare som kör över 70 km/h?

Svar: $\frac{0.04}{0.32} = 0.125$

Drö. sannolikheten att en slumpmässigt vald bil kör över 70 km/h givet att den kör över 50 km/h är 12.5%

Def Låt $A, B \subset \Omega$ s.a. $P(B) > 0$.

Där den betingade sannolikheten för A givet B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

I vårt exempel är $A = \{\text{bil kör} > 70 \text{ km/h}\}$ & $B = \{\text{bil kör} > 50 \text{ km/h}\}$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.04}{0.32} = 0.125$$

* $A \subset B$

Tal: kastar 2 tärningar. Givet ögonsumman = 4, vad är sannolikheten att vi slog minst en 3:a.

L: låt $\Omega = \{(a, b) : 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$, $B = \{\text{ögonsumma} = 4\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, $A = \{\text{minst en trea}\} = \{(1, 3), (2, 3), \dots, (6, 3), (3, 1), \dots, (3, 6)\}$

$$\text{Vi söker } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad P(B) = \frac{3}{36}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{3} //$$

Sats Givet $B \subset \Omega$ s.d. $P(B) > 0$, låt P' vara funktionen som f r varje $A \subset \Omega$ tar värdet $P'(A) = P(A|B)$. Då  r P' ett sannolikhetsmått.

B is måste verifiera att P' uppfyller de tre axiomen f r ett sannolikhetsmått, ska visa:

1) $P'(A) \in [0, 1] \quad \forall A \subset \Omega$:

$$P'(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad \text{ty } P(A \cap B) \geq 0$$

$$P'(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \text{ty } A \cap B \subset B$$

2) $P'(\Omega) = 1$:

$$P'(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $P'(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P'(A_k)$ om $A_1, \dots, A_k, \dots$ disjunkta

$$\begin{aligned} \text{har } P'(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \frac{P((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B)}{P(B)} \stackrel{*}{=} \frac{P(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap B)}{P(B)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B) = \sum_{k=1}^{\infty} P'(A_k) \end{aligned}$$

B is av *



låt $w \in (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B \Rightarrow w \in B$ & $w \in A_n$ för ngt n .

$$\Rightarrow w \in A_n \cap B \Rightarrow w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)$$

resten  vning

Tal: i en population  r 20% smittade av TBC. Ett snabbtest ger följande:

i) en smittad individ f r pos. diagnos m. sannolikhet 0.9

ii) ej smittad individ f r neg. diagnos m. sannolikhet 0.7

Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ får positiv diagnos?

1: steg 1 - inför beteckningar

låt $S = \{\text{vald person smittad}\}$

$+$ = $\{\text{vald person får positiv diagnos}\}$

$-$ = $\{\text{--- negativ ---}\} (= +^c)$

steg 2 - vad är känt?

$$P(+|S) = 0.9 \text{ \& } P(-|S^c) = 0.7 \text{ \& } P(S) = 0.2$$

steg 3 - vad söks?

$$\begin{aligned} P(+). \text{ ger } P(+) &= P(+ \cap S) + P(+ \cap S^c) = \frac{P(S)}{P(S)} P(+ \cap S) + \frac{P(S^c)}{P(S^c)} P(+ \cap S^c) \\ &= P(+|S) P(S) + P(+|S^c) P(S^c) = [P(S^c) = 1 - P(S) \text{ \& } P(+|S^c) = 1 - P(-|S^c)] \\ &= 0.9 \cdot 0.2 + (1 - 0.7)(1 - 0.2) = 0.42 // \end{aligned}$$

Anm: första likheten gäller då S & S^c är disjunkta & $\Omega = S \cup S^c$

Def $A_1, A_2, \dots, A_n$ är en partition av Ω om

i) de är disjunkta

ii) $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$

Sats Om $A_1, \dots, A_n$ är en partition av Ω har vi att

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k) P(A_k) \quad \forall B \subset \Omega$$

Den andra likheten gäller enbart om $P(A_k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$

Anm: satsen kallas för LTP "law of total probability"

Bevis $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{k=1}^n A_k) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)$ snitten är disjunkta

$$P(B) = P(\bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k)) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k)$$


Bayes sats om $P(A) > 0$ & $P(B) > 0$ då gäller

$$\text{att } P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Bevis $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ ■

Sats Om $A_1, \dots, A_n$ är en partition av Ω

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}$$

Beviset är övning!

Tal (forts)

a) givet att en person fått positiv diagnos, vad är sannolikheten att hen är smittad?

$\mathcal{L}$: söker $P(S|+)$, $P(S|+) = \frac{P(+|S)P(S)}{P(+)} = 0.9 \cdot \frac{0.2}{0.42} = \frac{3}{7}$

b) vad är sannolikheten att testet visar rätt?

$\mathcal{L}$: låt $R = \{\text{testet visar rätt}\}$.

$$P(R) = P(R \cap +) + P(R \cap -) = P(S \cap +) + P(S^c \cap -) = P(+|S)P(S) + P(-|S^c)P(S^c) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.74 //$$

21/3 Oberoende händelser

Intuitivt är A, B oberoende om

$$P(A|B) = P(A) \text{ \& } P(B|A) = P(B).$$

Problem: kräver att $P(A), P(B) > 0$, så ist

Def A, B oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Följd Om $P(B) > 0$ & A, B ober. $\Rightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\text{ober}}{=} \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) //$$

Def $A_1, A_2, A_3, \dots$ är (fullständigt) ober. om $\forall$ ändlig delmängd $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset \mathbb{N}$, gäller att $P(\bigcap_{k=1}^n A_{j_k}) = \prod_{k=1}^n P(A_{j_k})$

Obs Oberoende är ej detsamma som disjunkt!

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

Om A, B ober, A, C ober & B, C ober. är då A, B, C ober?

Svar nej!

Ta en krona singlar två gånger. Låt $A = \{1: \text{a kastet H}\}$,

$B = \{2: \text{a kastet H}\}$, $C = \{\text{exakt 1 kast är H}\}$

a) visa A, B ober, A, C ober & B, C ober.

b) visa A, B, C ej ober.

L $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$, vi har $P(A) = P(B) = 1/2$

$$P(A \cap B) = P((H, H)) = 1/4 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ så ober.}$$

$$\text{Vidare är } P(C) = P((H, T), (T, H)) = 2/4 = 1/2$$

$$P(A \cap C) = P((H, T)) = 1/4 = P(A)P(C) \text{ så } A, C \text{ ober. p.s.s. } B, C \text{ ober.}$$

$$b) A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C)$$

så A, B, C ej ober.

Tal Antag A, B obero. Visa att

a) A^c, B obero, b) A, B^c obero, c) A^c, B^c obero

L a) B: måste visa att $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$.

$$\begin{aligned} \text{Vi har } P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \stackrel{A, B \text{ obero}}{=} P(B) - P(A)P(B) = \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

b & c) övning

Tal parallell koppling

1) komponenterna fungerar obero. av varandra

2) systemet fungerar om minst en komp. funkar

3) komp. 1 fung. m.s. $1/2$ & komp. 2 m.s. $1/3$

Vad är s.k. att systemet fungerar?

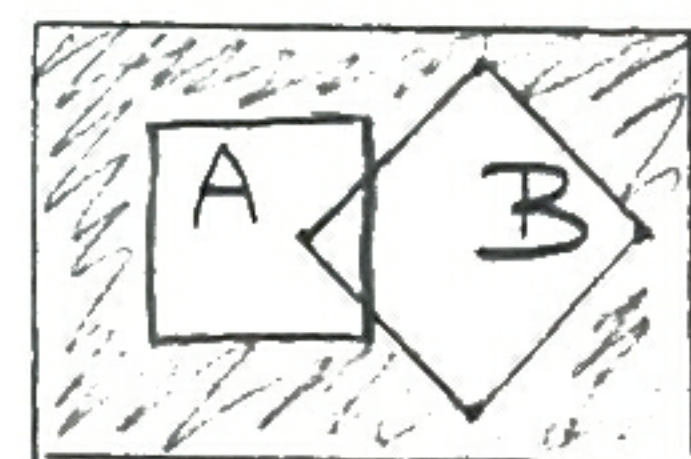
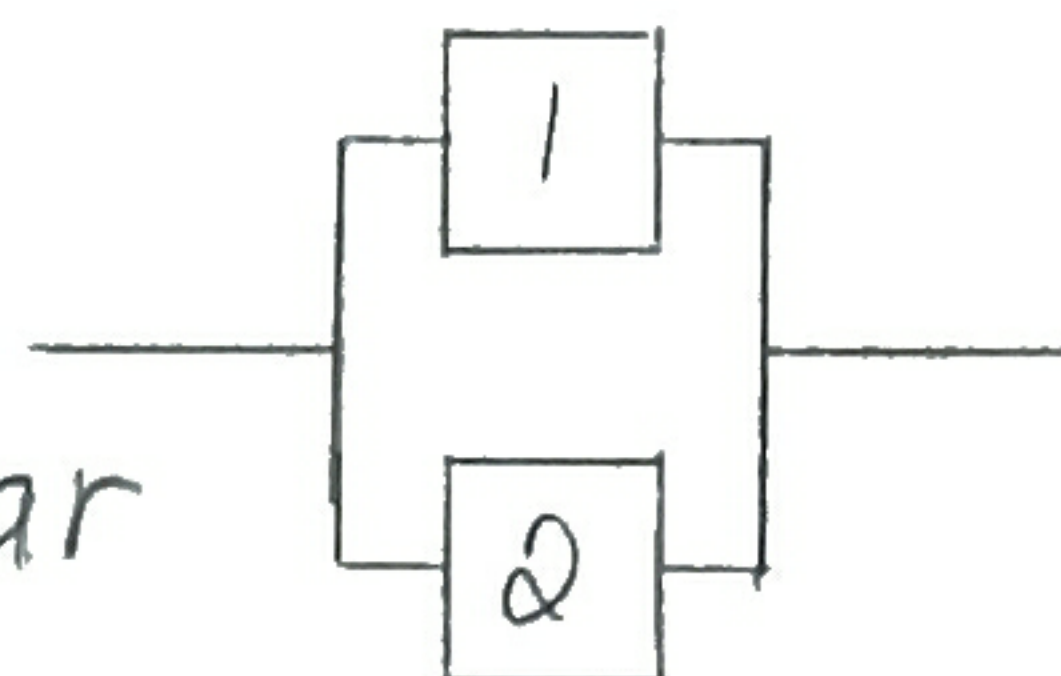
L $A = \{\text{komp. 1 fungerar}\}$, $B = \{\text{komp. 2 fungerar}\}$

Vet: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$

$$\begin{aligned} \text{Efterfrågas: } P(A \cup B) &= 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)P(B^c) \\ &= 1 - (1 - 1/2)(1 - 1/3) = 2/3 \end{aligned}$$

$$\Omega = \{(F, S), (F, F), (S, F), (S, S)\}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



SLUMPVARIABLER

En slumpvariabel (stokastisk variabel, s.v.) är en funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Kan göras mer generellt, t.ex. $X = \{\text{färgen på ett draget kort}\}$

$X: \Omega \rightarrow \{\text{spader, hjärter, ruter, klöver}\}$

Ex: kastar tärning 2 ggr, $X = \text{ögonsumman}$, $\Omega = \{(a, b) : 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$

$$X(a, b) = a + b, \quad \{X = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Diskreta s.v.

Def en s.v. X är diskret om den enbart kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden.

A är uppräkneligt oändligt om man kan lista alla element i A ($a_1, a_2, \dots$).

A är överuppräkneligt -"- ej kan lista -"-

Anm: vi kommer ofta betrakta $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ ($X \in \mathbb{Z}$)

Def antag att X kan anta värdena $x_1, x_2, x_3, \dots$. Då def. sannolikhetsfunktionen p_X (slf, pmf = probability mass function) för X , som $p_X(x_j) = \mathbb{P}(X=x_j)$, där $j=1, 2, \dots$

Anm: a) p_X ger oss alla sannolikheter för alla värden som X kan anta.

b) $p_X(x) = 0$ om $\nexists j$ s.d. $x = x_j$

c) ibland säger man att $\{\mathbb{P}(X=x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ är slf

Def Om $X \in \mathbb{R}$ def. fördelningsfunktionen (ffkn, cdf = cumulative distribution function) av $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$

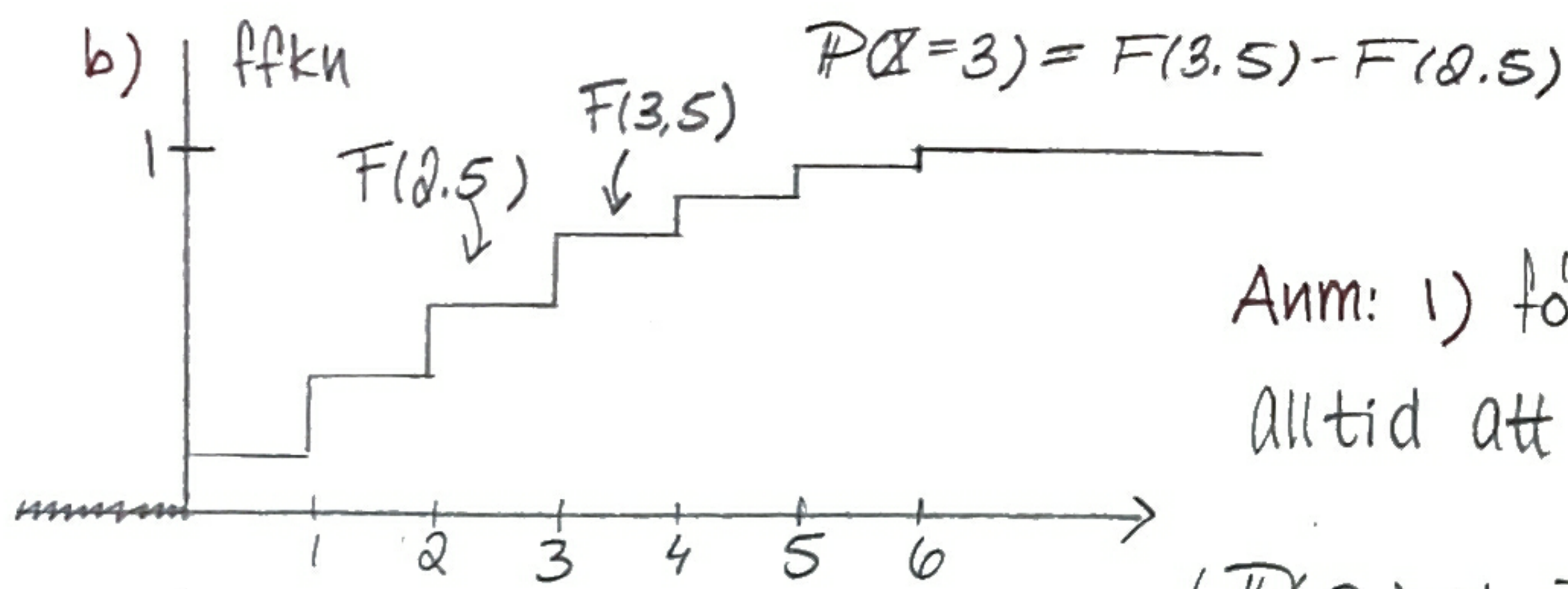
Ta en slant singlas 6 ggr. Låt $X = \#H$ & hitta slf samt skissa ffkn för X

Obs X kan anta $0, 1, \dots, 6$. $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{6}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{15}{2^6}$ ($\frac{6}{2}$)

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^6} \binom{6}{k}$ för $k=0, 1, \dots, 6$ ← skriv vilka k , viktigt!

(underförstått $\mathbb{P}(X=k)=0$ om $k \notin \{0, 1, \dots, 6\}$)

ty 2^{-6} = sanno. för ett fixt utfall & $\binom{6}{k} = \#$ utfall med exakt k s.t. H



Anm: 1) för en s.f. gäller
alltid att $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$

($P(\Omega) = 1$ i förtäckt form)

2) $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j: x_j \leq x} P(X = x_j)$, observerar att om vi har s.f. så vet vi f.f.k.n.

3) $p_X(x_j) = F\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) - F\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)$ om $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$
Om $X: \Omega \rightarrow \mathbb{Z} \Rightarrow P(X=k) = F(k) - F(k-1)$

Informellt X motsvarar $f(x)$ i analysen. Att ange s.f. eller f.f.k.n. är att ange fördelningen av X & motsvarar att vi specificerar funkt $f(x)$ (i.e. $= \sin(x), e^x$)

Räkneövning 21/3

Lv1 Kombinatorik & sannolikhetslära

Binomialkoefficienter

Antal sätt att välja k av n objekt, "n över k", $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Betingad Sannolikhet

$$P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lagen om total sannolikhet

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

Mer generellt: Om $\{B_i : i=1, \dots, n\}$ är en partition (dvs. $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$ & $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$), $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$

Bayes Formel

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Oberoende

A & B oberoende $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Intuitivt: A & B ober. $\Rightarrow P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

1.13 Poker

a) Sannolikhet för stege

Strategi: alla pokerhänder lika sannolika, så sannolikheten för stege är $\frac{\# \text{händer som är stege}}{\# \text{möjliga händer totalt}}$.

möjliga händer är # sätt att välja 5 kort från 52, dvs $\binom{52}{5}$

sätt att få stege: lägsta kortet kan vara ess, 2, 3, ..., 10

$\Rightarrow 10$ olika. Varje kort kan vara av 4 olika färger $\Rightarrow 4^5$

$$\Rightarrow P(\text{stege}) = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

b) sannolikhet för fyrtal

händer med fyrtal, 13 olika valörer, 5:e kortet vilket som helst av de 48 kvarvarande

$$\Rightarrow P(\text{fyrtal}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$$

c) sannolikhet för kak

13 valörer i triss, 1 av 4 ej med i triss.

12 valörer kvar för paret 2 av 4 färger med i paret

$$\Rightarrow P(\text{kak}) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

1.35 visa algebraiskt & genom att tolka betydelsen

$$a) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \frac{n!}{(n-r)! (n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

$$\begin{aligned} b) \binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)! (r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)! r!} = \\ &= \left\{ x! = x(x-1)! \right\} = \frac{(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)! (r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)! r(r-1)!} = \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)! r(r-1)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-r)! r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{r} \end{aligned}$$

1.48 3 röda & 2 vita bollar i en urna. Dra först en boll. Lågg tillbaka den & en till i samma färg. Dra nu en ny boll.

a) Sannolikheten att få en vit boll vid andra dragningen?

Låt A vara händelsen att första bollen är vit.

Låt B -//- andra -//-

Lagen om total sannolikhet $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$

$$P(A) = 2/5, \quad P(A^c) = 3/5, \quad P(B|A) = 3/6, \quad P(B|A^c) = 2/6$$

$$P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

b) sannolikhet att första dragningen var röd om andra bollen var vit?

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

2.10 2 pers. spelar basket, skjuter varannan gång, slutar när någon gör mål.

Spelare A gör mål med sannolikhet P_1

-//- B -//- P_2

Ober. av föregående försök.

a) Slf för # skott

$X = \# \text{ skott. } P(X=k) = ?$

k udda: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)(1-P_2)\dots P_1 = ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1$

k jämn: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)\dots P_2 = (1-P_1)^{\frac{k}{2}} (1-P_2)^{\frac{k}{2}-1} P_2$

$$\Rightarrow P(k) = P(X=k) = \begin{cases} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1 & \text{om } k=1, 3, 5, \dots \\ (1-P_1)^{\frac{k}{2}} (1-P_2)^{\frac{k}{2}-1} P_2 & \text{om } k=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

b) sannolikhet att A vinner?

$$P(A \text{ vinner}) = P(k \text{ udda}) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1 = \left[\text{vill använda geom-} \right]$$

$$\text{etrisk serie, } r < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}, \text{ låt } i = \frac{k-1}{2} = P_1 \sum_{i=0,1,2,\dots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^i =$$

$$= P_1 \frac{1}{1 - ((1-P_1)(1-P_2))} = \frac{P_1}{P_1 + P_2 - P_1 P_2}$$

2.20 2 askar inne håller n stickor vardera. Ta en sticka från slumpvis vald ask (båda askar lika sannolika). Upprepa tills vi försöker ta en sticka från en tom ask. Ange slf för k-antalet kvarvarande stickor i den andra asken.

Antag först att den ena asken har oändligt många stickor. Låt M vara antalet stickor $\bar{n}$ tagit från den när $\bar{n}$ upptäcker att den andra asken är tom. $\bar{n}$ upptäcker att asken är tom då $\bar{n}$ öppnar den $n+1$ ggr.

$$P(M=m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n+1}$$

(vet att tomma asken valdes sista gången).

Låt nu båda innehålla n stickor, k kvar = tagit $n-k$

$$\begin{aligned} P(K=k) &= P(M=n-k | M < n+1) = \frac{P(M=n-k \cap M < n+1)}{P(M < n+1)} = \frac{P(M=n-k)}{P(M < n+1)} = \\ &= 2P(M=n-k) = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \end{aligned}$$