Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2021-08-17 kl. 14:00-18:00 plus tid för uppladdning av lösningar 18:00-18:30. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta. Uppgifterna är anpassade efter tillgången till alla hjälpmedel, vilket betyder att en del av räknandet är tyngre än på en salstenta. Kom då ihåg att om du trots det får bråttom pga att du inte hinner med själva uträkningarna, redovisa din lösning i termer av dessa icke genomförda utäkningar. Du får då bara ett mycket litet avdrag på uppgiften.

1. (5p) Låt (X, Y) ha den bivariata täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm konstanten c, marginaltätheterna för X och Y och $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$.

2. (5p) Två lag, A och B, i någon sport spelar en matchserie om bäst av $2n + 1$ matcher där n är ett positivt heltal. Lagen spelar varannan match hemma och varannan match borta och lag A börjar hemma. Lag A är något bättre än B och vinner en hemmamatch med sannolikhet 0.6 och en bortamatch med sannolikhet 0.5.

(a) Vad är sannolikheten att lag A vinner matchserien om $n = 1$?

(b) Hur stort behöver n vara för att den approximativa sannolikheten att A vinner matchserien ska vara minst 0.99?

3. (5p) Låt $T_1, T_2, \dots$ vara oberoende och sådana att T_k är exponentialfördelad med parameter $1/k^\alpha$, där α är ett givet positivt tal. Låt $M_n = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$.

(a) Om $\alpha = 1$, vad är $\mathbb{P}(M_3 > 1)$?

(b) Låt $\epsilon > 0$. Visa att $\mathbb{P}(M_n > \epsilon) \to 0$ då $n \to \infty$ om och endast om $\alpha \le 1$.

4. (5p) Låt $X_1, \dots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel som har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{c^2}{1+c}(1 + x)e^{-cx}, \ x > 0,$$

där $c > 0$ är en okänd parameter. Ge en ML-skattning av c.

5. (5p) Låt N vara en stokastisk variabel som är Poissonfördelad med parameter 1 och, givet $N = n$, låt X vara diskret likformig på $\{0, 1, \dots, n\}$.

(a) Beräkna $\mathbb{P}(X = 3)$.

(b) Vad är $\mathbb{P}(N = n | X = 0)$, $n = 0, 1, \ldots$?

6. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende med $X_k \sim N(\mu, (k\sigma)^2)$ där μ och σ är okända parametrar (observera att varianserna alltså skiljer sig åt för olika k).

(a) Gör ett optimalt test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu \neq 0$ på 5% signifikansnivå för okänt σ^2 och $n = 9$ med följande mätdata:

$$3.8,\ -1.7,\ 10.1,\ 3.9,\ 0.7,\ 5.3,\ -0.4,\ 0.0,\ 14.4$$

(b) Gör ett optimalt symmetriskt 95% konfidensintervall för μ med samma data.

I ffa (b) kan det vara svårt att göra den konkreta beräkningen av intervallgränserna för just dessa data utan mjukvara, så det rekommenderas att man använder det (men, som alltid, får man poäng för att ge ett generellt svar även om man inte utför själva beräkningen).

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

(a) Betrakta testet $H_0 : \sigma^2 = 1$ mot $H_A : \sigma^2 > 1$ med känt σ^2 på 5% signifikansnivå. Hur stort måste n vara för att styrkan av testet ska vara minst 0.8 om det sanna värdet på σ^2 är 2? (Här räcker inte tabellen i tentatesen till, så du får använda någon statistisk kalkylator eller mjukvara.)

(b) Vad är styrkan av testet $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu > 0$ om $n = 9$ och det sanna värdet på μ är 2?

8. (5p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter 1 och låt N vara en geometriskt fördelad stokastisk variabel med parameter 1/2 oberoende av X_k:na. Låt

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

(a) Bestäm momentgenererande funktion M_Y av Y.

(b) Bestäm $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101

Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2021-08-17 kl. 14:00-18:00 plus tid för uppladdning av lösningar 18:00-18:30. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta. Uppgifterna är anpassade efter tillgången till alla hjälpmedel, vilket betyder att en del av räknandet är tyngre än på en salstenta. Kom då ihåg att om du trots det får bråttom pga att du inte hinner med själva uträkningarna, redovisa din lösning i termer av dessa icke genomförda utäkningar. Du får då bara ett mycket litet avdrag på uppgiften.

1. (5p) Låt (X, Y) ha den bivariata täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm konstanten c, marginaltätheterna för X och Y och $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

Lösning. Det gäller att

$$\int_0^1 \int_0^y x^2 y \, dy \, dx = \frac{1}{15},$$

så $c = 15$. Därmed är

$$f(x,y) = 15x^2y, \; 0 < x < y < 1.$$

Därför är

$$\mathbb{E}[X] = \iint x f(x,y) \, dx \, dy = 15 \int_0^1 \int_0^y x^3 y \, dx \, dy = \frac{5}{8}.$$

På samma sätt

$$\mathbb{E}[Y] = 15 \int_0^1 \int_0^y x^2 y^2 \, dx \, dy = \frac{5}{6}$$

och

$$\mathbb{E}[XY] = 15 \int_0^1 \int_0^y x^3 y^2 \, dx \, dy = \frac{15}{28}.$$

Då får vi också

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{15}{28} - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{366}.$$

2. (5p) Två lag, A och B, i någon sport spelar en matchserie om bäst av $2n+1$ matcher där n är ett positivt heltal. Lagen spelar varannan match hemma och varannan match borta och lag A börjar hemma. Lag A är något bättre än B och vinner en hemmamatch med sannolikhet 0.6 och en bortamatch med sannolikhet 0.5.

(a) Vad är sannolikheten att lag A vinner matchserien om $n = 1$?

(b) Hur stort behöver n vara för att den approximativa sannolikheten att A vinner matchserien ska vara minst 0.99?

Lösning. (a). Här gäller att räkna ihop de olika varianterna som A kan vinna. A kan vinna i två raka matcher och sannolikheten för det är $0.6 \cdot 0.5 = 0.3$. Sannolikheten att vinna på tre matcher är $0.6(0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5) = 0.3$. Summan av dessa är 0.6, vilket är sannolikheten att A vinner matchserien.

(b). Vi kan anta att alla matcher spelas oavsett om matchserien är avgjord innan dess. Om X får stå för totala antalet matcher som A vinner, så är $X = H + B$ där H är antalet hemmamatcher som A vinner och B är antalet bortamatcher som A vinner. Då är H och B oberoende och binomialfördelade med parametrar $n + 1$ och 0.6 respektive n och 0.5.

Enligt CGS gäller approximativt att $H \sim N(0.6(n+1), 0.24(n+1))$ och $B \sim N(0.5n, 0.25n)$ och därmed att $X \sim N(1.1n + 0.6, 0.49n + 0.24)$. Därför gäller

$$\mathbb{P}(X > 0) \approx \Phi\left(\frac{0.1n}{\sqrt{0.49n}}\right).$$

Här har vi försummat en termerna 0.6 i väntevärdet och 0.24 i variansen eftersom de blir försumbara om n är stort. Vi vill att $\mathbb{P}(X > 0) \geq 0.99$. Det gäller att $\Phi^{-1}(0.99) = 2.33$, så ekvationen i n blir

$$\frac{1}{\sqrt{49}}\sqrt{n} \geq 2.33.$$

Det ger

$$n \geq (2.33 \cdot 7)^2 \approx 266.$$

3. (5p) Låt $T_1, T_2, \ldots$ vara oberoende och sådana att T_k är exponentialfördelad med parameter $1/k^a$, där a är ett givet positivt tal. Låt $M_n = \min(T_1, T_2, \ldots, T_n)$.

(a) Om $a = 1$, vad är $\mathbb{P}(M_3 > 1)$?

(b) Låt $\epsilon > 0$. Visa att $\mathbb{P}(M_n > \epsilon) \to 0$ då $n \to \infty$ om och endast om $a \leq 1$.

Lösning. Det gäller att $M_n \sim exp(1 + 1/2^a + 1/3^a + \ldots + 1/n^a)$. Alltså gäller med $k = 1$ att $M_3 \sim exp(1 + 1/2 + 1/3) = exp(11/6)$ och därmed

$$\mathbb{P}(M_3 \geq 1) = e^{-11/6},$$

vilket således är svaret i (a).

(b). Det gäller att

$$\mathbb{P}(M_n \geq \epsilon) = e^{-\epsilon \sum_{k=1}^{n} 1/k^a}.$$

Högerledet går mot 0 om och endast om $\sum_{k=1}^{n} 1/k^a$ går mot ∞, vilket sker om och endast om $a \leq 1$.

4. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel som har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{c^2}{1+c}(1+x)e^{-cx},\ x > 0,$$

där $c > 0$ är en okänd parameter. Ge en ML-skattning av c.

Lösning. Likelihood blir

$$L(c; x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{c^2}{c+1}\right)^n \left(\prod x_k\right) \cdot e^{-c \sum x_k}.$$

Logaritmera och få

$$\ell(c; x_1, \ldots, x_n) = n(2\ln(c) - \ln(1+c)) - nc\overline{x} + \sum \ln x_k.$$

Derivera och sätt till 0 och få ekvationen

$$\frac{2}{c} - \frac{1}{c+1} - \overline{x} = 0.$$

Detta ger en en andragradsekvation i c och vi söker den positiva lösningen, vilken är

$$\hat{c} = \frac{1 - \overline{x} + \sqrt{\overline{x}^2 + 6\overline{x} + 1}}{2\overline{x}}.$$

5. (5p) Låt N vara en stokastisk variabel som är Poissonfördelad med parameter 1 och, givet $N = n$, låt X vara diskret likformig på $\{0, 1, \ldots, n\}$.

(a) Beräkna $\mathbb{P}(X = 3)$.

(b) Vad är $\mathbb{P}(N = n | X = 0)$, $n = 0, 1, \ldots$?

Lösning. För (a):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 3 | N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= e^{-1} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= e^{-1} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{e - \frac{8}{3}}{e}.
\end{aligned}$$

För (b): Det gäller enligt Bayes formel att

$$\mathbb{P}(N = n | X = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 | N = n)\mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(X = 0)}.$$

Täljaren är

$$e^{-1} \frac{1}{(n+1)!}$$

så nämnaren är

$$e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{e-1}{e}$$

vilket ger

$$\mathbb{P}(N = n | X = 0) = \frac{1}{(e-1)(n+1)!}.$$

6. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende med $X_k \sim N(\mu, (k\sigma)^2)$ där μ och σ är okända parametrar (observera att varianserna alltså skiljer sig åt för olika k).

(a) Gör ett optimalt test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu \neq 0$ på 5% signifikansnivå för okänt σ^2 och $n = 9$ med följande mätdata:

$$3.8,\ -1.7,\ 10.1,\ 3.9,\ 0.7,\ 5.3,\ -0.4,\ 0.0,\ 14.4$$

(b) Gör ett optimalt symmetriskt 95% konfidensintervall för μ med samma data.

I ffa (b) kan det vara svårt att göra den konkreta beräkningen av intervallgränserna för just dessa data utan mjukvara, så det rekommenderas att man använder det (men, som alltid, får man poäng för att ge ett generellt svar även om man inte utför själva beräkningen).

Lösning. (a). För att testa $H_0 : \mu = \mu_0$, utnyttja att med $Y_k(\mu_0) = (X_k - \mu_0)/k$ så gäller att under H_0 är $Y_k(\mu_0) \sim N(0, \sigma^2)$. Därför är testet $H_0 : \mu = \mu_0$ samma som att testa $\mu_{Y(\mu_0)} = 0$. Det testet förkastar på signifikansnivå 0.05 om

$$\left| \frac{\sqrt{n}\overline{Y(\mu_0)}}{s_{Y(\mu_0)}} \right| > F^{-1}_{t_{n-1}}(0.975).$$

Med given data är $n = 9$ och $F^{-1}_{t_8}(0.975) \approx 2.31$, så $H_0 : \mu = 0$ förkastas om

$$\left| \frac{3\overline{Y(0)}}{s_{Y(0)}} \right| > 2.31.$$

Räkning ger att $3\overline{Y(0)}/s_{Y(0)} = 1.62$. Vi kan alltså inte förkasta $H_0 : \mu = 0$ till förmån för $H_A : \mu \neq 0$ på 5% signifikansnivå.

(b). Använd korrespondensen mellan test och konfidensintervall. Det ger att konfidensintervallet består av alla μ_0 sådana att

$$\left| \frac{\sqrt{n}\overline{Y(\mu_0)}}{s_{Y(\mu_0)}} \right| \leq F^{-1}_{t_{n-1}}(0.975).$$

Med given data blir detta alla μ_0 sådana att

$$\left| \frac{3\overline{Y(\mu_0)}}{s_{Y(\mu_0)}} \right| \leq 2.31.$$

Genom prövning (till exempel i Matlab) ser vi att det approximativa konfidensintervallet blir

$$\mu \in [-0.66, 8.45].$$

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

   (a) Betrakta testet $H_0 : \sigma^2 = 1$ mot $H_A : \sigma^2 > 1$ med känt σ^2 på 5% signifikansnivå. Hur stort måste n vara för att styrkan av testet ska vara minst 0.8 om det sanna värdet på σ^2 är 2? (Här räcker inte tabellen i tentatesen till, så du får använda någon statistisk kalkylator eller mjukvara.)

   (b) Vad är styrkan av testet $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu > 0$ om $n = 9$ och det sanna värdet på μ är 2 och det är känt att $\sigma^2 = 4$?

Lösning. (a). Det gäller att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Därför förkastas $H_0 : \sigma^2 = 1$ till förmån för $\sigma^2 > 1$ om $(n-1)s^2 > t$ där $t = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.95)$.

Om $\sigma^2 = 2$ gäller att $(n-1)s^2/2 \sim \chi^2_{n-1}$, så

$$\mathbb{P}((n-1)s^2 > t) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(t/2) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.95)/2)$$

vilket ska vara minst 0.8. Med t.ex. Matlab ser vi att detta kräver att $n \geq 26$.

(b). Testet förkastar om $\sqrt{n}\overline{X}/\sigma \geq \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.65$, dvs om $3\overline{X}/2 \geq 1.65$. Men $3\overline{X}/2 = 3(\overline{X} - 2)/2 + 3$ och den första termen, kalla den Z, är $N(0, 1)$. Alltså

$$\mathbb{P}\left(\frac{3\overline{X}}{2} \geq 1.65\right) = \mathbb{P}(Z > -1.35) = \Phi(1.35) \approx 0.91.$$

8. (5p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter 1 och låt N vara en geometriskt fördelad stokastisk variabel med parameter $1/2$ oberoende av X_k:na. Låt

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

(a) Bestäm momentgenererande funktion M_Y av Y.

(b) Bestäm $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

Lösning. Det gäller att

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tY}|N]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{t\sum_1^N X_k}|N]] = \mathbb{E}[M_X(t)^N].$$

Nu gäller att

$$\mathbb{E}[s^N] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n s^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}s} - 1.$$

Det gäller också att

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{-(1-t)x} dx = \frac{1}{1-t}.$$

Alltså är

$$M_Y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}M_X(t)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2(1-t)}} - 1 = \frac{1}{1-2t}.$$

För att lösa (b), använd att $\mathbb{E}[Y^k] = M_Y^{(k)}(0)$. Vi har att

$$M_Y'(t) = \frac{2}{(1-2t)^2},$$

så $\mathbb{E}[Y] = 2$, och

$$M_Y''(t) = \frac{8}{(1-2t)^3}$$

och därmed $\mathbb{E}[Y^2] = 8$. Detta ger att $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 4$.

En alternativ lösning av (b) som inte använder (a) är att observera att $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1$, varför $\mathbb{E}[Y|N] = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y|N) = N$ och det följer att

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y|N)] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbb{E}[Y|N]) = \mathbb{E}[N] + \mathbb{V}\mathrm{ar}(N) = 4$$

eftersom väntevärde och varians för $Geo(1/2)$ båda är 2.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101