Tentamen
MVE302 Sannolikhet och statistik

2021-06-02 kl. 8:30-12:30 plus tid för uppladdning av lösningar 12:30-13:00. Se instruktioner på Canvas.

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 031-7723546

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel utom att på något sätt ta hjälp av en människa i realtid är tillåtna. Se instruktioner på Canvas

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 16 poäng, för betyg 4 minst 24 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng

---

Tips: Eftersom alla hälpmedel (utom andra människor) är tillåtna, kan du exempelvis använda symbolmanipulerande mjukvara. Det kan bespara dig en del tid och beräkningskraft att göra detta. Uppgifterna är anpassade efter tillgången till alla hjälpmedel, vilket betyder att en del av räknandet är tyngre än på en salstenta. Kom då ihåg att om du trots det får bråttom pga att du inte hinner med själva uträkningarna, redovisa din lösning i termer av dessa icke genomförda utäkningar. Du får då bara ett mycket litet avdrag på uppgiften.

1. (5p) Låt (X, Y) ha den bivariata täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm konstanten c, marginaltätheterna för X och Y och $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$.

Lösning. Eftersom

$$1 = \int\int f(x,y)dy\,dx = c\int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx = \frac{1}{8}c$$

får vi $c = 8$. Marginaltätheterna:

$$f_X(x) = \int f(x,y)dy = 8\int_0^x xy\,dy = 4x^3,\ 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)dx = 8\int_y^1 xy\,dx = 4y(1-y^2),\ 0 < y < 1.$$

För kovariansen behöves väntevärdena för X, Y och XY:

$$\mathbb{E}[X] = \int\int xf(x,y)dy\,dx = 8\int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx = \frac{4}{5}.$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int\int yf(x,y)dy\,dx = 8\int_0^1\int_0^x xy^2\,dy\,dx = \frac{8}{15}.$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int\int xyf(x,y)dy\,dx = 8\int_0^1\int_0^x x^2y^2\,dy\,dx = \frac{4}{9}.$$

Därmed

$$\mathbb{C}\text{ov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{4}{9} - \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15} = \frac{4}{225}.$$

2. (5p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler som har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{2}{9}(x-2)(5-x),\ 2 < x < 5$$

och skriv $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(a) Beräkna en approximation av

$$\mathbb{P}\left(135 \leq S_{40} \leq 140\right).$$

(b) Hur stort behöver n vara för att det ska gälla att

$$\mathbb{P}(S_n \geq 100) \geq 0.99?$$

Det räcker att ge n approximativt (av samma orsak som att det behövs en approximation i (a)).

Lösning. Låt X ha den angivna tätheten. Då ger symmetrin att $\mathbb{E}[X] = 7/2$ och

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{9}\int_2^5 x^2(x-2)(5-x)dx = \frac{127}{10}.$$

Alltså är

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{127}{10} - \frac{7^2}{2^2} = \frac{9}{20}.$$

Enligt CGS är alltså S_{40} approximativt $N(40 \cdot 7/2, 40 \cdot 9/20)$-fördelad, dvs $N(140, 18)$-fördelad. Alltså blir

$$\mathbb{P}(135 \leq S_{40} \leq 140) \approx \Phi\left(\frac{140-140}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{135-140}{\sqrt{18}}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{18}}\right) - \frac{1}{2}$$

eftersom $\Phi(0) = 1/2$ och $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Högersidan blir ca 0.381 vilket alltså är svaret i (a).

För (b): Det gäller för allmänt n (som är hyfsat stort) att CGS ger att $S_n \approx N(7n/2, 9n/20)$, vilket ger

$$\mathbb{P}(S_n \geq 100) \approx 1 - \Phi\left(\frac{100 - 7n/20}{\sqrt{9n/20}}\right) = \Phi\left(\frac{7n/20 - 100}{\sqrt{9n/20}}\right).$$

Vi vill sätta högerledet till 0.99 och lösa för n. Det ger att argumentet i Φ ska vara ca 2.33, vilket sedan ger en andragradsekvation i $\sqrt{n}$. Dock är det ganska lätt att gissa ungefär vilket n som krävs, eftersom det åtminstone krävs att $7n/2 > 100$, dvs $n \geq 29$. Lite snabbt prövande ger att $n = 31$ inte räcker, medan $n = 32$ räcker. Alltså är svaret $n = 32$.

3. (5p) Det fyra orterna A, B, C och D är förbundna på följande sätt. Det finns en väg mellan A och B, en väg mellan B och C, två vägar mellan A och C och en väg mellan C och D. Dessa fem vägar är de enda som finns. Var och en av vägarna är öppen med sannolikhet p oberoende av varandra.

(a) Vad är sannolikheten att exakt två av de fem vägarna är öppna?

(b) Vad är sannolikheten att det går att ta sig från A till D på de öppna vägarna?

(c) Givet att det är exakt två vägar öppna, vad är den betingade sannolikheten att det går att ta sig från A till B?

Lösning. (a) Antal öppna vägar är $Bin(5, p)$-fördelat, så svaret är $\binom{5}{2}p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$.

b) För att ta sig från A till D krävs att vägen CD är öppen och att antingen är minst av de två AC-vägarna öppna eller så är båda AB och BC öppna eller bådadera. Sannolikheten blir:

$$p(p^2 + (1 - p^2)(1 - (1 - p)^2)) = p^2(2 - 2p^2 + p^3).$$

Låt E vara händelsen att exakt två vägar är öppna och F händelsen att det går att komma från A till B. Då är $\mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(E \cap F)/\mathbb{P}(E)$. Händelsen E består av samtliga tio uppsättningar av exakt två öppna vägar. Händelsen $F \cap E$ består av de uppsättningar av exakt två vägar som gör att det går att ta sig från A till B. Det finns fyra stycken sådana uppsättningar som innehåller vägen AB och två som inte innehåller den vägen, totalt sex stycken. Varje uppsättning av exakt två vägar har samma sannolikhet, så

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

4. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel som har frekvensfunktion

$$p(k) = (1 - b)^2 k b^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots,$$

där $0 < b < 1$ är en okänd parameter. Ge en ML-skattning av b.

Lösning. Om vi har observationerna $x_1, \ldots, x_n$, blir

$$L(b; x_1, \ldots, x_n) = (1 - b)^{2n} \cdot \prod x_j \cdot b^{s-n}$$

där $s = \sum x_j$. Logaritmera, derivera och sätt till 0 och få

$$\frac{d}{db}\ell(b; x_1, \ldots, x_n) = -\frac{2n}{1 - b} + \frac{s - n}{b} = 0.$$

Lösningen är

$$\hat{b} = \frac{s - n}{s + n},$$

där $s = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

5. (5p) Låt X vara en stokastisk variabel som är Poissonfördelad med parameter λ.

(a) Gör ett approximativt 95% symmetriskt konfidensintervall för λ om $X = 100$.

(b) Gör ett exakt 95% uppåt begränsat konfidensintervall för λ om $X = 1$. Intervallgränsen ges med två decimalers noggrannhet.

Lösning. För (a), använd att när λ är stort så gäller att X är approximativt $N(\lambda, \lambda)$-fördelad. Detta ger

$$\mathbb{P}\left(\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \pm 1.96\right) \approx 0.95.$$

Det går att lösa ut λ ur olikheten, men precis som med binomialfördelningen så kan vi ersätta λ med X i nämnaren och lösa ut λ och få

$$\lambda = X \pm 1.96\sqrt{X} = 100 \pm 19.6$$

som approximativt 95% symmetriskt konfidensintervall.

För (b) bilda mängden

$$I = \{\tau : \text{ Testet } H_0 : \lambda = \tau \text{ mot } H_A : \lambda < \tau \text{ accepterar } H_0 \text{ på 5\% signnivå}\}.$$

Låt λ_0 vara det korrekta värdet på λ. Per definition av ett test gäller då uppenbart att $\mathbb{P}_{\lambda_0}(I \ni \lambda_0) = 0.95$ (oavsett testets specifikationer). Vidare gäller att om vi använder det mest naturliga testet, så förkastar vi $H_0 : \lambda = \tau$ till förmån för $\lambda < \tau$ om $X \leq x$ där x är det största heltalet j sådant att $\mathbb{P}_\tau(X \leq j) \leq 0.05$. Eftersom $\mathbb{P}_\tau(X \leq x)$ är avtagande i τ, gäller det då automatiskt att $\tau \in I, \tau' < \tau \Rightarrow \tau' \in I$, dvs I är ett uppåt begränsat intervall.

Om resultatet blir $X = x$ så betyder detta att den högra ändpunkten för I är det τ som är sådant att $\mathbb{P}_\tau(X \leq x) = 0.05$. Eftersom vi fick $X = 1$ så ska vi alltså bestämma det τ som ger $\mathbb{P}_\tau(X \leq 1) = (1+\tau)e^{-\tau} = 0.05$. Med två decimalers noggrannhet är lösningen till ekvationen $\tau = 4.74$. Det sökta konfidensintervallet blir då

$$\lambda \leq 4.74 \text{ (95\%)}.$$

6. (5p) Betrakta den vanliga modellen för linjär regression: $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$ där ϵ_k:na är oberoende och $N(0, \sigma^2)$-fördelade. Antag att vi har data (x_k, Y_k), $y = 1, 2, 3$, enligt

$$(0,0), (1,1), (2, Y_3)$$

där Y_3 ännu inte observerats. Antag att $a = 0$, $b = 1/2$ och $\sigma^2 = 2^2$. Vad är då sannolikheten att Y_3 blir sådan att den statistiker som inte känner till a, b och σ^2 kommer att få att

(a) $\hat{b} < 0$?

(b) nollhypotesen $H_0 : b = 0$ förkastas till förmån för $H_A : b \neq 0$ på 10% signifikansnivå?

Lösning. Siffrorna ger $S_{xx} = 2$, $S_{xy} = Y$ och $S_{yy} = \frac{2}{3}(Y^2 - Y + 1)$, där vi för enkelhets skull har skrivit $Y_3 = Y$. Eftersom $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx}$ är denna negativ precis då $S_{xy} < 0$, dvs då $Y < 0$. Nu vet ju vi att $Y \sim N(1, 2^2)$, så

$$\mathbb{P}(\hat{b} < 0) = \mathbb{P}(Y < 0) = \Phi\left(\frac{-1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.31.$$

Konfidensintervallet på 90% ges av

$$b = \hat{b} \pm 6.31 \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}},$$

där 6.31 är 95%-fraktilen i t_1-fördelningen, och vi undrar vad som krävs av Y för att punkten 0 ska ligga utanför intervallet. Det betyder att lösa

$$6.31^2 \frac{s^2}{S_{xx}} \leq \hat{b}^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2}.$$

Genom att använda de uttryck vi fått och att $s^2 = \frac{1}{n-2}(S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}) = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$, sätta in i ekvationen och låta mjukvara lösa för Y, får vi att olikheten gäller då $1.569 < Y < 2.757$. Alltså

$$\mathbb{P}(H_0 \text{ förkastas}) \approx \mathbb{P}(1.567 < Y < 2.757) = \Phi\left(\frac{1.757}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0.567}{2}\right) \approx 0.198.$$

7. (5p) Låt $X_1, \ldots, X_{10}$ vara ett stickprov på en normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ.

(a) Betrakta testet $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu > 0$ med känt σ^2 på 5% signifikansnivå. Hur stort måste det sanna värdet på μ (uttryckt i termer av σ) minst vara för att styrkan av testet ska vara minst 0.9?

(b) Som bekant är s^2 en väntevärdesriktig skattning av σ^2, men vad är medianen av s^2 uttryckt som $m = a\sigma^2$ där a anges i tre decimalers noggrannhet? (Kom ihåg att medianen av X är det tal m sådant att $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$.)

Lösning. (a) Testet förkastar H_0 om $\sqrt{10} \cdot \overline{X}/\sigma > \Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$. Nu är ju

$$\mathbb{P}_\mu \left(\frac{\sqrt{10} \cdot \overline{X}}{\sigma} > 1.64 \right) = 1 - \Phi \left(1.64 - \frac{\sqrt{10}\mu}{\sigma} \right) = \Phi \left(\frac{\sqrt{10}\mu}{\sigma} - 1.64 \right).$$

För att detta ska bli minst 0.9 krävs att $\sqrt{10}\mu/\sigma - 1.64 \geq \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.28$. Den olikheten ger

$$\mu \geq \frac{2.92\sigma}{\sqrt{10}}.$$

(b) Eftersom $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_9$ gäller

$$\mathbb{P}(s^2 \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)x}{\sigma^2} \right) = F_{\chi^2_9}\left(\frac{9x}{\sigma^2} \right) = 0.5$$

då $9x/\sigma^2 = F^{-1}_{\chi^2_9}(0.5)$ och det x som löser detta är precis m, så

$$m = \frac{\sigma^2 F^{-1}_{\chi^2_9}(0.5)}{9} \approx 0.927\sigma^2.$$

8. (5p) Låt X vara en ickenegativ heltalsvärd stokastisk variabel. Definiera funktionen ψ som

$$\psi_X(s) = \mathbb{E}[s^X],\ s \geq 0.$$

(Med andra ord är $\psi_X(s) = M_X(\ln s)$ om M_X är mgf för X.)

(a) Visa att det för $j = 0, 1, 2, \ldots$ gäller att $\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{j!}\psi_X^{(j)}(0)$, där $\psi_X^{(j)}$ är den j:te derivatan av ψ_X.

(b) Låt X_{ij}, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ vara oberoende stokastiska variabler fördelade som X. Låt $Z_1, Z_2, \ldots$ ges rekursivt av $Z_1 = X_{11}$ och för $i = 2, 3, \ldots$,

$$Z_i = \sum_{j=1}^{Z_{i-1}} X_{ij}.$$

Visa att om $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = s_0,$$

där s_0 är den minsta lösningen till ekvationen $s = \psi_X(s)$. (Ledning: $s = 1$ är alltid en lösning till ekvationen och eftersom det är lätt att visa att villkoret $\mathbb{P}(X = 1) < 0$ medför att $\psi''_X(s) > 0$ och att det därför kan finnas högst en annan lösning. Detta är det enda som villkoret $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ behövs till och du behöver alltså i ditt bevis inte använda det villkoret alls.)

Lösning. (a) Det gäller att

$$\psi_X^{(j)}(s) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-j+1)P(X = k)s^{k-j}$$

så, efter att ha stoppat in $s = 0$ och observerat att alla termer utom den för $k = j$ då blir 0:

$$\psi^{(j)}(0) = j!P(X = j).$$

(b) Skriv p_n för $\mathbb{P}(Z_n = 0)$. Eftersom $Z_m = 0$ med för att $Z_n = 0$ för alla $m > n$ gäller att $0 = p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ och därför existerar gränsen $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Det gäller att

$$p_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Z_n = 0|Z_1)] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)^{Z_1}] = \mathbb{E}[p_{n-1}^X] = \psi_X(p_{n-1}).$$

Genom att gå i gräns på bägge sidor följer att $p = \psi_X(p)$, så p måste vara en av de maximalt två lösningarna till $\psi_X(s) = s$. Om det inte existerar någon lösning $s_0 \in (0, 1)$ finns det inget mer att visa, så antag att det finns en lösning $s_0 \in (0, 1)$. Det gäller då att visa att p är s_0 och inte 1. Den slutsatsen följer direkt om vi kan visa att $p_n \leq s_0$ för alla n.

Antag nu att $p_n > s_0$ för något n. Eftersom $\psi_X(s) < s$ för $s \in (s_0, 1)$ gäller då att $\psi(p_n) < p_n$. Men $\psi_X(p_n) = p_{n+1}$, så det betyder att $p_{n+1} < p_n$, vilket är en motsägelse och saken är klar.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101