Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Tid: Måndagen den 2015-06-01, 8.30-12.30.
Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.
Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medföljande tabeller.

Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng.
(Eventuella bonuspoäng från två inlämningsuppgifter tillkommer med maximalt 2+2 = 4 poäng)
Betygsgränser: För betyget ”3” fordras minst 15 poäng, för betyget ”4” minst 20 poäng och för betyget ”5” minst 25 poäng.

---

1. Du kastar tre vanliga sex-sidiga tärningar en gång.

- **a.** Vad är sannolikheten att poängtalen på alla tre tärningarna är lika? (1p)
- **b.** Låt **Y** vara definierad som summan av de tre poängtalen. Vad är då utfallsrummet för **Y**? (1p)
- **c.** Vad är sannolikhetsfunktionen (frekvensfunktionen) för **Y** (definierad som i b-delen) i punkten **y=5**? (1p)
- **d.** Vad är den betingade sannolikheten att produkten av de tre poängtalen är lika med **4** givet att summan av poängtalen är **5**? (1p)

2. En likformigt fördelad stokastisk variabel på intervallet **[a,b]** har väntevärdet **3** och standardavvikelsen **0.5** . Bestäm med hjälp av denna information värdena på intervallgränserna **a** och **b**. (3p)

3. På en cirkelskiva med diametern**=2** och centrum i origo i ett ortogonalt koordinatsystem väljs en stokastisk punkt **(X,Y)** med likformig fördelning.

- **a.** Vad blir den tvådimensionella frekvensfunktionen för **(X,Y)**? (1p)
- **b.** Visa att korrelationen mellan **X** och **Y** är **0**. (2p)
- **c.** Visa att **X** och **Y** <u>inte</u> är oberoende stokastiska variabler. (2p)

4. Antag att **X** är Poissonfördelad med väntevärde **E[X]=10**.

- **a.** Bestäm momentgenererande funktionen för **X**. (1p)
- **b.** Använd resultatet i a-delen för att beräkna tredjemomentet av **X**. (2p)

5. Antag att du i samband med statistisk inferens rörande en viss fysikalisk parameter **θ** gör två oberoende försök där du dels, baserat enbart på försöksresultatet i det första försöket, har en väntevärdesriktig punktskattning **Y** av **θ** med det teoretiska standardfelet **1.5** och dels, baserat enbart på det andra försöket, har ännu en väntevärdesriktig punktskattning **Z** av samma parameter **θ** med teoretiska standardfelet **2/3**.

- **a.** För vilka reella konstantkombinationer av **a** och **b** blir **T=aY+bZ** en väntevärdesriktig punktskattning av **θ**? (1p)
- **b.** Vilket av alla de möjliga **a**-**b**-paren du angivit i a-delen resulterar i det minsta standardfelet hos punktskattningen **T**? (2p)

VÄND!

6. I ett normalfördelningsstickprov med **10** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **5.85** och **0.27**.

a. Du ombeds att förvandla informationen till ett nedåt begränsat konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet $\boldsymbol{\mu}$ för de enskilda observationerna med konfidensgraden **95%**. Vad blir resultatet? (2p)

b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen $\mathbf{H_0}$: väntevärdet $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{5}$, med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen $\mathbf{H_1}$: väntevärdet $\neq \mathbf{5}$. Vad blir då din slutsats? (2p)

7. Den empiriska fördelningsfunktionen för ett stickprov av **n=200** kontinuerligt fördelade stokastiska variabler observerades i punkten **x=5,3** till värdet **0,67**.

a. Vad betyder utsagan ovan (d.v.s. vad har man gjort för att räkna ut siffran **0,67**)? (1p)

b. Beräkna ett symmetriskt observerat konfidensintervall med approximativ konfidensgrad **95%** för fördelningsfunktionens värde i punkten **x=5,3**. (2p)

8. I en linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler (**Y**) med avseende på inställningsvariabeln (**x**) antas väntevärdena på **Y**-variablerna följa det linjära sambandet **a+bx**. Varianserna för samtliga **Y**-variablerna antas vara **1**.

a. Beräkna den observerade maximum likelihoodskattingen av riktningskoeffecienten b om du har fyra **y**- observationer: **1.5**, **2.8**, **4.1** respektive **6.0**, vid x-inställningarna **-1**, **2**, **5** respektive **8**. (1p)

b. Beräkna ett uppåt ~~symmetriskt~~ begränsat konfidensintervall för **b** med konfidensgrad **95%**. (2p)

9. Du vill dela upp en grupp om **24** elever i **3** grupper så att alla tre grupperna har precis **8** medlemmar. Du bryr dig bara om vilka som är med i samma grupp, inte i vilken ordning de väljs eller gruppens "nummer" (**1, 2 eller 3**).

a. Hur många sätt kan indelningen göras på? (2p)

b. Om du helt slumpmässigt väljer en av de möjliga indelningarna, vad är då chansen att **3** utvalda personer (Gunnar, Bengt och Katarina) hamnar i tre olika grupper? (2p)

LÖSNINGAR TMA321 TENTAMEN 2015-06-02 (CHALMERS F2)
OLLE NERMAN

---

1. a. ANTALET MÖJLIGA UTFALL $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. ANTALET GYNNSAMMA FÖR HÄNDELSEN $= 6$ (ALLA VISAR 1 ELLER 2 ... ELLER 6). SÖKT SANNOLIKHET $= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

b. UTFALLSRUMMET Ω_Y FÖR Y BESTÅR AV ALLA MÖJLIGA SUMMOR MELLAN 3 OCH 18, D.V.S.
$\Omega_Y = \{3, 4, 5, \dots, 18\}$

c. $P_Y(5) = P(Y=5) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$, TY MED HÄNSYN TILL ORDNING ÄR $\{Y=5\} = \{(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)\}$ SÅ ATT ANTALET GYNNSAMMA FÖR HÄNDELSEN $\{Y=5\}$ ÄR 6.

d. $P(\{\text{PRODUKTEN} = 4\} \cap \{Y=5\}) = \frac{3}{36}$ TY PRODUKTEN ÄR ~~[illegible]~~ FYRA FÖR DE TRE UTFALLEN $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ (MEN TRE FÖR DE ÖVRIGA 3 UTFALLEN I $\{Y=5\}$.
HÄRAV $P(\text{PRODUKTEN} = 4 \mid Y=5) = \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}$

---

2. OM X LIKFORMIGT FÖRDELAD PÅ INTERVALLET $[a,b]$ SÅ GÄLLER ATT

$$E[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DETTA GER EKVATIONSSYSTEMET

$$\frac{a+b}{2} = 3 \quad \text{OCH} \quad \frac{(b-a)^2}{12} = 0{,}25$$

UR DETTA $\frac{a+b}{2} = 3$ OCH $(b-a) = \sqrt{3}$

$\therefore$ $a = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}866$ OCH $b = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}134$

---

3. a. $f(x,y) = c$ OM $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ OCH 0 F.Ö. $\iint_{R^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$
$c = \frac{1}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{\pi}$

b. $E[X] = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \frac{1}{\pi} dx \right) dy = \int_{-1}^{1} 0\, dy = 0$, $E[XY] = \int_{-1}^{1} y \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \frac{1}{\pi} dx \right) dy = 0$

$\Rightarrow$ KOVARIANSEN $(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 0 = 0$.

c. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}{\pi}$. SYMMETRI GER $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{\pi} \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ FÖR (NÄSTAN ALLA x, y; $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$)

$\therefore$ X OCH Y ÄR INTE OBEROENDE.

TMA 321, 2015-06-01 (F2 CHALMERS)

LÖSNINGSFÖRSLAG. FORTS. OLLE NERMAN.

---

4. a. $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}\right) = e^{\lambda(e^t-1)}$.

EFTERSOM $E[X]=\lambda$ SÅ BLIR SVARET $e^{10(e^t-1)}$

b. $E[X^3] = 10+100+200+1000 = 1310$, TY

$E[X^3]=M_X'''(0)$ OCH UPPREPAD ANVÄNDNING AV PRODUKTREGELN FÖR DERIVERING GER DE 4 TERMERNA

---

5. a. $E[T]=E[aY+bZ]=aE[Y]+bE[Z]=a\theta+b\theta=(a+b)\theta=\theta$

$\Rightarrow a+b=1$.

b. $VAR[T] \underset{\text{OBEROENDE}}{\overset{\uparrow}{=}} a^2 VAR[Y] + b^2 VAR[Z] \underset{\text{a-DELEN}}{\overset{\uparrow}{=}} a^2\frac{9}{4}+(1-a)^2\frac{4}{9}$.

DERIVERA OCH SÄTT TILL 0 FÖR ATT IDENTIFIERA EV. MINIMUM (ARGUMENTET) GER

$\frac{18}{4}a - \frac{8}{9}(1-a)=0 \Rightarrow a=\frac{16}{97}$ (OCH $b=\frac{81}{97}$).

(CHECKA ATT DET ÄR EN MINPUNKT...)

---

6. a. t-METODEN. FRIHETSGRADSANTAL $10-1=9$.

$F_{t(9)}(1,833)=0,95$ GER OBSERVERAT t-INTERVALL

$\mu \geq 5,87 - \frac{1,833\cdot 0,27}{\sqrt{10}} \approx 5,713$ (95%)

b. $F_{t(9)}(2,262)=0,975$ GER T-TESTET:

FÖRKASTA OM $\left|\sqrt{10}\,\frac{\bar{X}-5}{s}\right| \geq 2,262$.

EFTERSOM OBSERVERAT "t" = 9,95 FÖRKASTAS H_0 (TILL FÖRMÅN FÖR MOTHYPOTESEN ATT $\mu>5$)

---

7. a. MAN HAR BERÄKNAT ANTALET OBSERVATIONER SOM ÄR $\leq 5,3$ OCH SEDAN DELAT MED TOTALA OBSERVATIONSANTALET 200 ($\frac{x}{200}=0,67$ $\Rightarrow x=134$)

b. X SOM I a-DELEN $\sim$ BINOMIALFÖRDELAD$(200, F(5,3))$

$\Rightarrow F(5,3)=0,67 \pm \frac{1,96\sqrt{0,67\cdot 0,33}}{\sqrt{200}}$ ($\approx$ 95%)

(MED BINOMIALINTERVALL FÖR STORA n)

$F(5,3)=0,67 \pm 0,125$ ($\approx$ 95%)

TMA 321, 2015-06-01 (F2 CHALMERS)

LÖSNINGSFÖRSLAG FORTS. OLLE NERMAN

8\. a. $\bar{x} = 3{,}5$, $\bar{y} = 3{,}6$. $\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})y_i = 22{,}2$

OCH $\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2 = 45 \Rightarrow \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2} \approx 0{,}493$

b. $\hat{b} \sim N\left(b, \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}}\right)$ GER KONFIDENSINTERVALL

$b \leq \hat{b} + 1{,}65 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{45}} = 0{,}493 + \dfrac{1{,}65}{\sqrt{45}} \approx 0{,}642$ (95 %)

9\. a. OM VI HÅLLER ORDNING PÅ GRUPPNUMRET FINNS $\binom{24}{8\,8\,8} = \dfrac{24!}{8!\,8!\,8!}$ OLIKA INDELNINGAR.

UTAN ORDNING PÅ GRUPPERNA MÅSTE VI DELA DETTA TAL MED $3!$ = ANTALET SÄTT ATT ORDNA TRE OBJEKT (GRUPPERNA).

b. LÖSES ENKLAST GENOM ATT HÅLLA ORDNING PÅ GRUPPERNA OCH RÄKNA ANTALET GYNNSAMMA GRUPPINDELNINGAR OCH DELA MED ANTALET MÖJLIGA. ANTALET GYNNSAMMA BLIR

$$\frac{\binom{21}{7}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{14}{7}\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{7}\binom{1}{1}}{\left(\frac{24!}{8!\,8!\,8!}\right)} = \frac{64}{253} \approx 0{,}253$$