

Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Tid: Onsdagen den 27 Augusti 2014, 14.00-18.00.

Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskrivna formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Tentamen består av 9 frågor med sammanlagt 32 poäng +eventuella bonuspoäng från inlämningsuppgifter.

Betygsgränser: För betyget "3" fordras minst 15 poäng, för betyget "4" minst 20 poäng och för betyget "5" minst 25 poäng .

1. Du kastar 3 vanliga sex-sidiga tärningar. Vad är sannolikheterna att
 - a. summan av poängen blir exakt = 4? (1p)
 - b. summan av poängen blir minst 5? (1p)
 - c. produkten av de tre poängtalerna blir exakt =6? (1p)

2. Om tre händelser **A**, **B** och **C** är oberoende av varandra och sannolikheterna är $P(A)=0,2$, $P(B)=0,4$ och $P(C)=0,9$. Vad är då:
 - a. Sannolikheten att ingen av dem inträffar? (1p)
 - b. Väntevärdet av **X**, där **X** är antalet av de tre händelserna som inträffar? (1p)
 - c. Variansen för **X** (definierad som i b)? (1p)

3. X_1, X_2, \dots, X_4 antas utgöra ett oberoende stickprov på en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärdet $=1/\theta$, där $\theta > 0$ är en okänd parameter.
 - a. Bestäm MLE-skattaren (the Maximum Likelihood Estimator) för θ -parametern. (2p)
 - b. Om du observerat $x_1=17$, $x_2= 3$, $x_3= 12$ och $x_4= 7$. Vad blir då den observerade MLE-punktskattningen av θ ? (1p)

4. Vid observation av 15 oberoende stokastiska variabler X_1, X_2, \dots, X_{15} , från en och samma exponentialfördelning, blev medelvärdet 3,8 . Skatta på lämpligt sätt:
 - a. intensitetsparametern λ i exponentialfördelningen . (1p)
 - b. väntevärdet i exponentialfördelningen. (1p)
 - c. medianen i exponentialfördelningen. (1p)
 - d. sannolikheten för ett värde över 5 i exponentialfördelningen, $P(X_i > 5)$. (1p)
 - e. standardfelet i skattningen i b-uppgiften (diskutera också förutsättningarna). (1p)

5. I ett normalfördelningsstickprov med 8 observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till 15,27 och 0,47.
 - a. Du ombeds att förvandla informationen till ett observerat symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet μ för de enskilda observationerna med konfidensgraden 95%. Vad blir resultatet? (2p)

- b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen H_0 : väntevärdet=15 med signifikansnivån 1 % mot den alternativa hypotesen H_1 : väntevärdet > 15. Vad blir då din slutsats? (2p)
6. Låt X vara antalet oberoende försöksupprepningar som behöver göras till och med att en händelse A med sannolikheten $p=1/4$, inträffar för första gången.
- a. Vad är sannolikheten att X får ett jämnt utfall? (dvs för att X tillhör mängden $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$) (2p)
- b. Låt nu Y = antalet oberoende försöksupprepningar som behövs till och med att händelsen inträffar för andra gången. Vad är sannolikheten att Y får ett jämnt utfall. (2p)
7. På en viss parkeringsplats finns 15 parkeringsrutor i en rad. 5 bilar ställer sig i tur och ordning och helt slumpmässigt på en av de lediga platserna. Vad är
- a. sannolikheten för att det inte står någon bil på de 3 mittersta platserna? (1p)
- b. Sannolikheten för att det står en bil på mittplatsen och ingen annan bil står direkt bredvid denna? (2p)
8. Z är livslängden på en apparat som består av två enheter A och B (d.v.s Z = tiden tills apparaten blir trasig första gången). Båda dessa enheter A respektive B har exponentialfördelade livslängder X respektive Y som kan antas oberoende av varandra och har väntevärden som är 4 år respektive 5 år.
- a. Antag att apparaten är trasig precis när någon av enheterna A och/eller B är trasig. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för Z . (2p)
- b. Nu antar vi istället att apparaten är trasig om och endast om båda enheterna A och B är trasiga. Bestäm under dessa nya förutsättningar fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för Z . (2p)
9. I en enkel linjär regression med svarsvariabler y och inställningsvariabler x blev summan av de $n=10$ beroende y -variablerna 12,3 och medelvärdet av x -variablerna var 0.32. Skattningen av riktningskoefficienten för regressionslinjen β blev 0.22.
- a. Beräkna en observerad punktskattning av regressionslinjens intercept α . (1p)
- b. Beräkna en observerad punktskattning av väntevärdet (av Y -variabeln) vid x -inställningen 2. (1p)
- c. Antag att felvarianserna i den linjära regressionsmodellen för Y -variablerna i regressionsmodellen är kända och lika med 4, att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt enstickprovs-vis) beräknade "stickprovsvariansen" för de deterministiska x -variablerna är 3.1. Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av β ? (1p)

Lycka till!