

Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Tid: Fredagen den 17 Januari 2014, 14.00-18.00.

Examinator: Olle Nerman, MV, Chalmers.

Jour: Alexey Lindo, telefon: 772 8294.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskrivna formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng.

Betygsgränser: För betyget "3" fordras minst 15 poäng, för betyget "4" minst 20 poäng och för betyget "5" minst 25 poäng .

1. Antag att X är Bernoulli-fördelad med parameter $p=0.7$.
 - a. Bestäm momentgenererande funktionen för X . . (1p)
 - b. Bestäm momentgenererande funktionen för $Y=3-4X$. (1p)
 - c. Bestäm väntevärdet och variansen för Y definierad som i b-delen? (2p)

2. Antag att X är Normalfördelad med Väntevärdet 4 och Variansen 9. Vad är
 - a. Sannolikheten att X antar ett positivt värde, $P(X>0)$? (1p)
 - b. Sannolikheten $P(|X-4|>3)$? (1p)
 - c. Sannolikheten $P(|X|>5)$? (2p)

3. I en Poissonprocess $\{N(t), t \geq 0\}$ med intensiteten c händelsetidpunkter/minut (=pulser/minut) så observerar du att det under 20 minuter inträffar $N(20)=154$ händelsetidpunkter (=pulser).
 - a. Beräkna en observerad Maximum Likelihood-skattning av c . (2p)
 - b. Använd centrala gränsvärdessatsen på lämpligt sätt för att bilda ett approximativt symmetriskt observerat konfidensintervall för c med konfidensgrad 95% . (2p)

4. Låt Y vara maximum av 3 oberoende likformigt fördelade (rektangulärt fördelade) stokastiska variabler på intervallet $[0,10]$.
 - a. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för Y . (2p)
 - b. Bestäm väntevärdet för Y . (2p)

5. Vid observation av 15 oberoende stokastiska variabler X_1, X_2, \dots, X_{15} från en och samma exponentialfördelning, blev aritmetiska medelvärdet 2.7 . Skatta på lämpligt sätt:
 - a. intensitetsparametern λ i exponentialfördelningen . (1p)
 - b. väntevärdet i exponentialfördelningen. (1p)
 - c. medianen i exponentialfördelningen. (1p)
 - d. sannolikheten för ett värde under 2 i exponentialfördelningen, $P(X_i < 2)$. (1p)

VÄND!

6. I ett normalfördelningsstickprov med **15** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **10.25** och **0.37**.
- Du ombeds att förvandla informationen till ett symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet μ för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)
 - Du ombeds istället att pröva nollhypotesen H_0 : väntevärdet=**10** med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen H_1 : väntevärdet > **10**. Vad blir då din slutsats? (2p)
7. I en enkel linjär regression med svarsvariabler y och inställningsvariabler x blev summan av de $n=10$ beroende y -variablerna **10,3** och medelvärdet av x -variablerna blev **0.42**. Skattningen av riktningskoefficienten för regressionslinjen β blev **0.32**.
- Beräkna en punktskattning av väntevärdet (av Y -variabeln) vid x -inställningen **2**. (2p)
 - Antag att standardavvikelseerna σ i den linjära regressionsmodellen för Y -variablerna i regressionsmodellen är kända och lika med **2**, att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt stickprovs-vis) beräknade ”stickprovsvariansen” för de deterministiska x -variablerna är **6.3**. Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av β ? (1p)
 - Använd resultatet i b för att beräkna ett observerat konfidensintervall för riktningskoefficienten β med konfidensgraden **95%**. (1p)
8. Tre händelser **A**, **B** och **C** har sannolikheter som alla är större än **0.7**.
- Visa att detta gör att sannolikheten för att alla händelserna inträffar samtidigt, $P(A \cap B \cap C)$, **inte** kan vara = **0**. (2p)
 - Den betingade sannolikheten $P(A|B)$ måste vara minst **4/7**. (2p)

1. a. $M_X(t) = E[e^{tX}] = (1-p) + pe^t = 0,3 + 0,7e^t$

b. $M_Y(t) = E[e^{t(3-4X)}] = e^{3t} E[e^{-4tX}] = e^{3t} M_X(-4t) = e^{3t} (0,3 + 0,7e^{-4t})$

c. $E[Y] = M'_Y(0) = (3 - 4E[X]) = 3 - 4 \cdot 0,7 = 0,2$

$VAR[Y] = M''_Y(0) - (M'_Y(0))^2 = VAR[3-4X] = (-4)^2 VAR[X] = 16 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 3,36$

2. a. $P(X > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-4}{\sqrt{9}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \approx 1 - 0,9082 \approx 0,0918$

b. $P(|X-4| > 3) = \Phi\left(\frac{1-4}{\sqrt{9}}\right) + (1 - \Phi\left(\frac{7-4}{\sqrt{9}}\right)) = 2 \cdot (1 - \Phi(1)) = 2 \cdot (1 - 0,8413) \approx 2 \cdot 0,1587 \approx 0,3174$

c. $P(|X| > 5) = P(X \leq -5) + P(X > 5) = \Phi\left(\frac{-5-4}{3}\right) + (1 - \Phi\left(\frac{5-4}{3}\right)) = 2 - \Phi(3) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2 - 0,9987 - 0,6293 = 0,372$

3. $N(20) \sim \text{POISSONFÖRDELNING}(20, c)$

$L(c) = \frac{(20c)^k e^{-20c}}{k!}$ OM $N(20) = k$

$\frac{d \ln L(c)}{dc} = 0 \Rightarrow c = \frac{k}{20} \quad \therefore \hat{c} = \frac{N(20)}{20} = \frac{154}{20} = 7,7$

$N(20) \approx \text{NORMALFÖRDELNING}(20c, 20c)$. ANVÄND

$\frac{N(20) - 20c}{\sqrt{20c}} \approx \frac{N(20) - 20c}{\sqrt{N(20)}} \approx N(0, 1) \Rightarrow$

$c = \hat{c} \pm \frac{1,96 \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{20}} = 7,7 \pm \frac{1,96 \cdot \sqrt{7,7}}{\sqrt{20}} \quad (\approx 95\%)$

4 a. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y < 0 \\ \left(\frac{y}{10}\right)^3 & \text{om } y \in [0, 10] \\ 1 & \text{om } y > 10 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} P'_Y(y) = f'_Y(y) = \frac{3y^2}{10^3} \\ \text{om } y \in [0, 10] \\ (0 \text{ f.ä.}) \end{array} \right\}$

b. $E[Y] = \int_0^{10} y \cdot \frac{3y^2}{10^3} dy = \left[\frac{3y^4}{4 \cdot 10^3} \right]_0^{10} = \frac{36}{4} = 9$

TENTAMEN I TMA 321, M.S. FAKF 2014-01-17
 LÖSNINGSFÖRSLAG (FURT.) OLLE MERUMBU

5. a. ML-skattmat (MOMENTSKATTMAT) AV $\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$, DÄR
 $\bar{X} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i \therefore \hat{\lambda} = \frac{1}{2,17}$

b. $E[\bar{X}] = \frac{1}{\lambda} \therefore E[\bar{X}] = 2,17$

c. MED $E[\bar{X}] = m \Rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = 0,5 \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$

d. $P(\bar{X}_i < 2) = P(\bar{X}_i \leq 2) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2}$ $\hat{P}(\bar{X}_i < 2) = 1 - e^{-\hat{\lambda} \cdot 2} = 1 - e^{-\frac{2}{2,17}}$

6 a. t-INTERVALL PARERAT PÅ 14 FRIHETSGRADER

$F_{t(14)}(2,977) = 0,995$ GER KONFIDENSINTERVALL

$\mu = \hat{\mu} \pm \frac{2,977 \cdot s}{\sqrt{15}} = 10,25 \pm \frac{2,977 \cdot 0,37}{\sqrt{15}}$ (99%)

b. t-TEST, ENSIDIGT, OBSERVERVAD SIGNIFIKANS

$t = \frac{\sqrt{15} \cdot \frac{10,25 - 10}{0,37}}{1} \geq 1,761$ ($F_{t(14)}(1,761) = 0,95$)

$\Rightarrow H_0$ FÄRKASTAS PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 5%

7. a. PUNKTSKATTMAT AV $\alpha + \beta \cdot z$. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot z$

$\hat{\beta} = 0,32$ $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = \frac{10,3}{10} - 0,32 \cdot 0,42$

b. $\hat{\beta} \sim \text{NORMALF.} \left(\hat{\beta}, s^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) = N \left(\hat{\beta}, 4 \cdot \frac{1}{14 \cdot 6,3} \right)$

c. $\beta = \hat{\beta} \pm 1,96 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{1}{14 \cdot 6,3}}$ (95%)
 (NORMALFORDENINGSBESTÄMT!)

8. a. $P(A \cap B \cap C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) \geq$

$\geq 1 - (P(A) + P(B) + P(C)) \geq 1 - 0,3 - 0,3 - 0,3 = 0,1$

b. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0,7}$ MEN $P(A|B) \leq 1$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1,4 - P(A \cap B) \leq 1$

$\therefore P(A \cap B) \geq 0,4$ VILKET GER OLIKHOLED.