**Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.**

**Tid: Måndagen den 14 Januari 2013, 9.30-12.30.**

**Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.**

**Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.**

**Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng.**

**Betygsgränser: För betyget "3" fordras minst 15 poäng, för betyget "4" minst 20 poäng och för betyget "5" minst 25 poäng .**

---

1. Vid observation av **25** oberoende stokastiska variabler $\mathbf{X_1, X_2, \ldots .., X_{25}}$ från en och samma exponentialfördelning, blev medelvärdet **3,8** . Skatta på lämpligt sätt:
   a. intensitetsparametern $\boldsymbol{\lambda}$ **i** exponentialfördelningen . (1p)
   b. väntevärdet i exponentialfördelningen. (1p)
   c. medianen i exponentialfördelningen. (1p)
   d. sannolikheten för ett värde under **2** i exponentialfördelningen, $\mathbf{P(X_i < 2)}$ . (1p)
   e. standardfelet i skattningen i b-uppgiften (diskutera också förutsättningarna). (1p)

2. Du kastar **3** vanliga sex-sidiga tärningar. Vad är sannolikheterna att
   a . summan av poängen blir exakt = **5**? (1p)
   b. summan av poängen blir minst **5**? (1p)
   c. produkten av de tre poängtalen blir exakt =**4**? (1p)

   Låt nu summan av poängtalen av de tre kasten vara den stokastiska variabeln **Y**.
   d. Bestäm väntevärdet och variansen för **Y**. (2p)

3. På en viss parkeringsplats finns **12** parkeringsrutor i en rad. **4** bilar ställer sig i tur och ordning och helt slumpmässigt på en av de lediga platserna. Vad är
   a. sannolikheten att det inte står någon bil på de båda ytterplatserna? (1p)
   b. sannolikheten att det står bilar på de båda ytterplatserna ? (1p)
   c. Sannolikheten att det står en bil på den vänstra ytterplatsen och ingen bil på den högra? (2p)

4. Kostnaden för att garantireparera en borrmaskin av ett visst fabrikat som fått ett fel under garantitiden på **1** år kan antas vara en stokastisk variabel med väntevärdet **350** kronor och standardavvikelsen **100** kronor. Vad är approximativt sannolikheten att **300** sådana garantireparationer totalt kostar mindre än **109.000** kronor? (3p)

5. Förklara följande begrepp:
   a. väntevärdesriktighet hos en punktskattning (1p)
   b. konfidensgrad hos ett konfidensintervall (1p)
   c. systematiskt fel hos en punktskattning. (1p)

*VÄND!*

6. I ett normalfördelningsstickprov med **10** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **15.35** och **0.47**.
    a. Du ombeds att förvandla informationen till ett symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet **μ** för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)
    b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen **$H_0$**: väntevärdet**=15** med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen **$H_1$**: väntevärdet **> 15**. Vad blir då din slutsats? (2p)
7. I en enkel linjär regression med svarsvariabler **y** och inställningsvariabler **x** blev summan av de **n=10** beroende **y**-variablerna **15,3** och medelvärdet av **x**-variablerna var **0.32**. Skattningen av riktningskoeffecieten för regressionslinjen **β** blev **0.22**.

    a. Beräkna en observerad punktskattning av regressionslinjens intercept **α.** (1p)
    b. Beräkna en punktskattning av väntevärdet (av **Y**-variabeln) vid **x**-inställningen **2**. (1p**)**
    c. Antag att felvarianserna i den linjära regressionsmodellen för **Y**-variablerna i regressionsmodellen är känd och lika med **4,** att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt enstickprovs-vis) beräknade ”stickprovsvariansen” för de deterministiska **x**-variablerna är **6.3.** Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av **β?** (1p)
    d. Använd resultatet i c för att beräkna ett observerat konfidensintervall för riktningskoefficienten **β** med konfidensgraden **95%.** (1p)
8. Betrakta 2 händelser **A** och **B** i ett sannolikhetsförsök. Visa att
    a. **P(A∩B)≥PA)+P(B)-1 .** (2p)
    b. **P(A|B)≥1-(1-P(A))/P(B) .** (2p)

**LYCKA Till!**

LÖSNINGAR TILL TMA321, MATEMATISK STATISTIK, F-KF,
TENTAMENSDAG 2013-01-14. OLLE NERMAN, MV, CHALMERS.

1 a, ML-SKATTNING $1/\bar{X}$. OBSERVERAD $= 1/3{,}8 \approx 0{,}263$

b. —"— $\bar{X}$. OBSERVERAD $3{,}8$.

c, —"— $\ln 2\,\bar{X}$ (TY $E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ OCH MEDIANEN $= \frac{\ln 2}{\lambda}$).
OBSERVERAD $= (\ln 2)\cdot 3{,}8$

d, $P(X_i \leq 2) = F_{X_i}(2) = 1 - e^{-\lambda 2}$, SKATTNING $1 - e^{-\frac{2}{3{,}8}}$.

e. TEORETISKT STANDARDFEL $\sqrt{VAR[\bar{X}]} = \sqrt{\frac{VAR[X_i]}{25}} = \sqrt{\frac{1}{25\lambda^2}} =$
$= \frac{1}{5\lambda}$. SKATTNING $= \bar{X}/5$. FÖRUTS. $E[\bar{X}] = \frac{1}{\lambda}$, D.V.S.
ATT $\bar{X}$ ÄR V.V.R. SVAR: $3{,}8/5 \approx 0{,}76$

2. a. SEX FALL $(1,2,2)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(3,1,1)$, $(1,3,1)$, $(1,1,3)$
AV $6^3 \Rightarrow 6/6^3 = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$

b. $1 - P(\text{SUMMAN HÖGST } 4) = 1 - \frac{1}{6^3} - \frac{3}{6^3} = 1 - \frac{4}{6^3} \approx 0{,}9815$.
HÄR ÄR $\frac{1}{6^3} = P(\text{SUMMAN} = 3)$ OCH $\frac{3}{6^3} = P(\text{SUMMAN} = 4)$.

c. SEX FALL $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$, $(4,1,1)$, $(1,4,1)$, $(1,1,4)$
$\Rightarrow \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$

3. a. RÄKNAT UTAN HÄNSYN TILL BITARNAS "ORDNING" GENOM
LIKFORMIGHET ÖVER DELMÄNGDERNA AV BELAGDA PLATSERNA
ANTALET MÖJLIGA FALL $= \binom{12}{4}$ SVAR: $\binom{10}{4}/\binom{12}{4} = \frac{14}{33} \approx 0{,}424$
ANTALET GYNNSAMMA FALL $= \binom{10}{4}$

b. ANTALET MÖJLIGA $= \binom{2}{2}\cdot\binom{10}{2}$ SVAR: $\binom{10}{2}/\binom{12}{4} = \frac{1}{11} \approx 0{,}909$

c. ANTALET MÖJLIGA $= \binom{1}{1}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{10}{3}$ SVAR: $\binom{10}{3}/\binom{12}{4} = \frac{8}{33} \approx 0{,}242$

4. OM $X$ = KOSTNADEN FÖR 300 REP. $\Rightarrow X \approx N(300\cdot 350, 300\cdot 100^2)$
(PÅ GRUND AV CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN)
$\therefore P(X \leq 109.000) \approx \Phi\left(\frac{109.000 - 105.000}{\sqrt{300\cdot 100^2}}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \approx \Phi(2{,}31) \approx 0{,}989$

5. a. OM $\hat{\gamma}$ ANTAS UPPSKATTA $\gamma$ SÅ ÄR $\hat{\gamma}$ VÄNTEVÄRDESRIKTIG OM
$E[\hat{\gamma}] = \gamma$ ($E_\theta[\hat{\gamma}] = \gamma(\theta)$ FÖR ALLA MÖJLIGA MODELLPARAMETRAR $\theta$).

b. OM $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ KONFIDENSINTERVALL FÖR EN REELL PARAMETER $\theta$
SÅ ÄR KONFIDENSGRADEN
$\alpha = \text{"}\max_\theta\text{"}\, P_\theta[\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]]$ (OCH OM DENNA SANNOLIKHET INTE
VARIERAR MED DET VERKLIGA $\theta$ SÅ ÄR $\alpha = P(\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}])$)

c, SYSTEMATISKT FEL, MED BETECKNINGAR SOM I a) :
$b(\theta) = E[\hat{\gamma}(\theta)] - \gamma(\theta)$

6. a. t-INTERVALL MED $n=10$. FRIHETSGRADER $= n-1 = 9$

$\mu = \bar{X} \pm 3{,}25 \frac{S}{\sqrt{10}}$ (99 %) HÄR ÄR $F_{t(9)}(3{,}25) = 0{,}995$

OBSERVERAT INTERVALL

$\mu = 15{,}35 \pm 3{,}25 \frac{0{,}47}{\sqrt{10}}$ (99 %) $\mu = 15{,}35 \pm 0{,}483$ (99%)

b. FÖRKASTA OM $T = \frac{\bar{X} - 15}{S/\sqrt{10}} \geq 1{,}833$ (ENSIDIGT t-TEST), OBSERVERAD TESTSTATISTIKA

$t = \frac{15{,}35 - 15}{0{,}47/\sqrt{10}} = 2{,}35 > 1{,}833$ HÄR ÄR $F_{t(9)}(1{,}833) = 0{,}$

$\therefore$ FÖRKASTA NOLLHYPOTESEN (= "VI HAR PÅVISAT MOTHYPOTESEN".)

7. a. $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x} = 1{,}53 - 0{,}22 \cdot 0{,}32 \approx 1{,}4596$

b. $\alpha + \beta \cdot 2 \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta} 2 = 1{,}53 - 0{,}22 \cdot 0{,}32 + 0{,}22 \cdot 2 \approx 1{,}8996$

c. $\hat{\beta} \approx N\left(\beta ; \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}\right)$, MEN $\sigma^2 = 4$ OCH

$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 9 \cdot s_x^2 = 9 \cdot 6{,}3 \Rightarrow \hat{\beta} \approx N(\beta ; 4/9 \cdot 6{,}3)$

d. $\beta = \hat{\beta} \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}}$ (95%)

OBSERVERAT INTERVALL

$\beta = 0{,}22 \pm \underbrace{1{,}96\left(\frac{2}{3\sqrt{6{,}3}}\right)}_{\approx 0{,}52}$ (95%)

8. a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \iff$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$

b. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} = 1 - \frac{(1 - P(A))}{P(B)}$

(NÄR $P(B) > 0$, D.V.S. NÄR V.L. ÄR DEFINIERAT)