

## Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

### Extratenta

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Onsdagen den 11 Maj 2012. 13.15—17.15

Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.

Tentamen består av 7 frågor med sammanlagt 32 poäng

Betygsgränser: För betyget "3" fordras minst 15 poäng, för betyget "4" minst 20 poäng och för betyget "5" minst 25 poäng .

---

1. Du utför en serie av oberoende försök och observerar huruvida en viss händelse A inträffar eller ej. Antalet försök som du behöver utföra för att händelsen ska inträffa 15 gånger är en stokastisk variabel  $Y$ . Sannolikheten för att A ska inträffa i en enskild försöksupprepning är  $p$ .
  - a. Bestäm sannolikheten för händelsen  $Y=17$  som funktion av  $p$ . (1p)
  - b. Bestäm sannolikheterna för händelserna  $Y=k$  för alla positiva heltal  $k$ . (1p)
  - c. Bestäm formeln för ML-skattningen av  $p$  baserad på observation av  $Y$ . (2p)
  - d. Hur ser lämpligen förkastelseområdet ut om du testar nollhypotesen att  $p=0,5$  mot mothypotesen att  $p>0,5$  på signifikansnivån 5% och använder  $Y$  som test-variabel? (2p)
2. Hur kan man förvandla en serie av oberoende likformigt fördelade slumpstal simulerade på intervallet  $[0,1]$  till
  - a. en serie av oberoende exponentialfördelade slumpstal med intensitetsparameter=4? (2p)
  - b. en Poissonprocess med intensitetsparameter 2? (2p)
3. För en viss exponentialfördelad stokastisk variabel  $X$  är sannolikheten att få ett utfall i intervallet  $[0,1]$  lika med  $0,7$ . Bestäm median, väntevärde och varians för  $X$ . (3p)
4. Tjockleken på kex i en viss produktionsprocess antas variera lite grann på ett slumpmässigt sätt och oberoende för de individuella kexen. Väntevärdet av ett enskilt kex's tjocklek antas vara **4 mm** och standardavvikelsen **0,3 mm**. Vad är (approximativt) sannolikheten för att minst **36** kex (staplade som de brukar) får plats mellan två metallstöd med avståndet **150 mm**. (de kex som får plats, när de läggs i ett och ett, mellan stöden bildar ett paket...). Motivera svaret. (3p)
5.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  antas utgöra ett i.i.d. stickprov på en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärdet  $=1/\theta$ , där  $\theta>0$  är en okänd parameter.
  - a. Bestäm ML-skattaren för parametern  $\theta$ . (2p)
  - b. Om  $n=4$  och du observerat  $x_1=12, x_2= 15, x_3= 19$  och  $x_4= 17$ . Vad blir då den observerade ML-punktskattningen av  $\theta$ ? (2p)

6. I en linjär regressionsmodell av oberoende normalfördelade stokastiska variabler ( $Y$ ) med avseende på inställningsvariabeln ( $x$ ) antas väntevärdena på  $Y$ -variablerna följa det linjära sambandet  $a+bx$ . Varianserna för samtliga  $Y$ -variablerna antas vara 1.
- Beräkna maximum likelihoodskattningen av riktningskoefficienten  $b$  om du har fyra  $y$ - observationer: 1.5, 2.8, 4.1 respektive 6.0, vid  $x$ -inställningarna -1, 2, 5 respektive 8. (3p)
  - Beräkna en punktskattning för standardavvikelseparametern i modellen. (2p)
  - Beräkna ett symmetriskt prediktionsintervall för en ny oberoende observation med konfidensgraden 5% vid inställningen  $x_0=12$ . (2p)
7. Du har två stickprov på normalfördelningar av storlek 5 resp 10 med olika okända väntevärden och där varianserna hänger ihop på ett sådant sätt att det lilla stickprovet har dubbelt så stor varians som det stora, men i övrigt inte är kända.
- Använd väntevärdena och variansen för observationerna i det lilla stickprovet som parametrar och skriv upp likelihoodfunktionen för observationerna. (1p)
  - Beräkna Maximum Likelihoodskattningen för variansparametern. (2p)
  - Hur bör skattningen i b) justeras för att den skall bli väntevärdesriktig? (2p)