Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Tid: Torsdagen den 12 Januari 2012.

Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 30 poän

Betygsgränser: För betyget "3" fordras minst 12 poäng, för betyget "4" minst 18 poäng och för betyget "5" minst 24 poäng .

---

1. För en viss exponentialfördelad slumpvariabel **X** är sannolikheten att få ett utfall i intervallet **[0, 3]** lika med **0,5**. Bestäm väntevärde och varians för **X**. (3p)

2. Låt **X** vara Normafördelad med väntevärde **3** och standardavvikelse **2**. Vad är

   a. medianen i fördelningen för **X**? (1p)

   b. maximum av sannolikhetstätheten (pdf) för **X**? (1p)

   c. sannolikheten **P(|X|>5)** ? (1p)

   d. den övre kvartilen i fördelningen för **X**? (1p)

3. Tjockleken på kex i en viss produktionsprocess antas variera lite grann på ett slumpmässigt sätt och oberoende för de individuella kexen. Väntevärdet av ett enskilt kex´s tjocklek antas vara **4 mm** och standardavvikelsen **0,3 mm**. Vad är (approximativt) sannolikheten för att minst **36** kex (staplade som de brukar) får plats mellan två metallstöd med avståndet **150 mm**. (de kex som får plats, när de läggs i ett och ett, mellan stöden bildar ett paket…). Motivera svaret. (3p)

4. $\mathbf{X_1, X_2, \ldots X_n}$ antas utgöra ett i.i.d. stickprov på en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärdet **=1/ θ**, där **θ>0** är en okänd parameter.
   a) Bestäm ML-skattaren (the Maximum Likelihood Estimator) för parametern **θ**. (2p)
   b) Om **n=4** och du observerat $\mathbf{x_1=12, x_2= 15, x_3= 19}$ och $\mathbf{x_4= 17}$. Vad blir då den observerade ML-punktskattningen av **θ**? (1p)

5. a) Ge exempel på ett sannolikhetsförsök med tre händelser **A**, **B** och **C** som har egenskaperna att **P(A)=P(B)=P(C)= 0.5** samtidigt som **A** och **B**, **A** och **C** respektive **B** och **C** är parvis oberoende händelser, men också sådant att alla tre händelserna **A**, **B** och **C** aldrig kan inträffa samtidigt. (3p)
   b) Är de tre händelserna i a-uppgiften oberoende? Motivera svaret. (1p)

6. En tvådimensionell slumpvariabel (vektor) **(X,Y)** är likformigt fördelad på en cirkelskiva centrerad i origo med radien **1**. D.v.s. **(X,Y)** har sannolikhetstätheten (pdf) **f(x,y)=c** (en konstant) om avståndet från **(x,y)** till **(0,0)** är **< 1**, och **f(x,y)=0** om avståndet är **≥ 1**.
   a) Bestäm konstanten **c** . (1p)
   b) Bestäm väntevärdet **E[X]** och variansen **Var[X]**. (2p)
   c) Bestäm den endimensionella sannolikhetstätheten (**pdf**) för **X**. (2p)

7. Pelle har krockat med sin Vespa och den behöver ny lack. På grund av nya miljökrav får han inte använda originallacken från femtiotalet. Femtiotalslacken torkade på i snitt tre minuter. Tillverkaren påstår att torktiden för den nya lacken är kortare, vilket vi vill undersöka.

   a) Ställ upp den noll- och alternativ(mot)hypotes för att undersöka och förhoppningsvis påvisa att den nya lacken torkar snabbare. (2p)
   b) Vid sexton försök där små plåtbitar lackades med den nya lacken uppmättes följande torktider

   1.4 2.1 2.8 0.9 2.4 1.7 3.7 2.7 2.6 1.9 2.8 2.8 2.2 2.2 3.4 1.9 .

   Från detta beräknades stickprovsmedelvärdet **2. 3438** och stickprovsvariansen **0.5106** . Testa hypotesen från fråga a. på signifikansnivån = **5%**. Vilka fördelningsantaganden gör du och vilken slutsats drar du? (2p)

8. Låt **X** vara antalet oberoende försöksupprepningar som behöver göras till och med att en händelse **A,** som har sannolikheten **p** i varje enskilt försök, inträffar för första gången.
   a. Vad är sannolikheten att **X** får ett udda utfall? (dvs för att **X** tillhör mängden **{1,3,5,7,….}**) (2p)
   b. Låt nu **Y=** antalet försöksupprepningar som behövs till och med att händelsen inträffar för andra gången. Vad är sannolikheten att **Y** får ett udda utfall. (2p)

LÖSNINGAR TILL TMA 321 MATEMATISK STATISTIK
11 JANUARI 2012. OLLE NERMAN, MV-CHALMERS

---

1. $P(X \in [0,3]) = 1 - e^{-3\lambda} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{3}$. $E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{\ln 2}$ OCH
$VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{3}{\ln 2}\right)^2$

2. a. m=MEDIANEN DEF AV $P(X \le m) = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi\left(\frac{m-3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $m = 3$

b. $\max f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$

c. $P(|X| > 5) = P(X \le -5) + P(X > 5) = \Phi\left(\frac{-5-3}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) = \Phi(-4) + (1-$
$\approx 1 - \Phi(1) \underset{\text{TABELL}}{=} 0{,}1587$

d. ÖVRE KVARTILEN c DEF. AV $P(X \le c) = 0{,}75 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = 0{,}75 \Rightarrow c = 3 + 0{,}6$
$\approx 4{,}3$

3. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$ X = SUMMAN AV 36 KEX TJOCKL
$\approx$ NORMALFÖRDELAD $(144, 36 \cdot 0{,}09) \Rightarrow$
$P(X < 150) \approx \Phi\left(\frac{150-144}{\sqrt{36 \cdot 0{,}09}}\right) \approx \Phi\left(\frac{6}{1{,}8}\right) = \Phi(3{,}33) \approx 0{,}99566$

4. a. $L(\theta) = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{x_1+\dots+x_n} e^{-\frac{n}{\theta}}}{x_1! \cdots x_n!}$ $\qquad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{-(x_1+\dots+x_n)}{\theta} + \frac{n}{\theta^2} = 0$
$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{x_1+\dots+x_n}$ OPTIMERAR. ESTIMATORN ÄR ALLTSÅ $\hat{\theta} = \frac{n}{(X_1+\dots+X_n)}$

b. $\hat{\theta} = \frac{4}{12+15+19+17} = \frac{4}{63} = 0{,}0635$

5. a. $\iint_{\{(x,y):\, x^2+y^2<1\}} c \, dx\,dy = 1 \Leftrightarrow \pi \cdot 1^2 \cdot c = 1$ $\therefore$ $c = \frac{1}{\pi}$

b. $E[X] = \iint_{\{(x,y);\, x^2+y^2 \le 1\}} x \frac{1}{\pi} \, dx\,dy = \dots = 0$
$VAR[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] = \iint_{\{(x,y);\, x^2+y^2 \le 1\}} x^2 \frac{1}{\pi} \, dx\,dy = \dots = \frac{1}{4}$

c. FÖRDELNINGSFKN. $F_X(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} \frac{2\sqrt{1-u^2}}{\pi} \, du & -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{2\sqrt{1-u^2}}{\pi} & 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$

6. a. H_0: DEN NYA LACKEN TORKAR PÅ I SNITT 3 TIMMAR (ELLER MER)
$H_1 (= H_A)$: DEN NYA LACKEN TORKAR SNABBARE ÄN PÅ (I SNITT) 3 TIMMAR

b. OM ENSKILDA OBSERVATIONERNA ANTAS VARA ($\approx$) NORMALFÖRDELADE SÅ KAN VI ANVÄNDA ENSIDIGT t-TEST DÄR VI FÖRKASTAR FÖR EXTREMA NEGATIVA UTFALL PÅ TESTVARIABELN $t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-3}{s}$ EFTERSOM $n=16$ SÅ SKALL VI ANVÄNDA t-FÖRDELNING $(n-1=15)$ SOM REFERENS NÄR VI BESTÄMMER TRÖSKELN = KRITISKA VÄRDET
$\underset{\text{TABELL}}{\Rightarrow}$ FÖRKASTA OM $t < -1{,}753$. OBSERVERAT
$t = \sqrt{16}\,(2{,}3438 - 3\ ) \approx -3{,}67$

7. a. BETRAKTA ETT FÖRSÖK MED TVÅ SLANTSINGLINGAR OCH UTFALLEN KRONA, KLAVE I DESSA. HÄNDELSERNA A = KRONA I KAST 1, B = KRONA I KAST 2 RESP C = ANTALET KRONA I DE TVÅ FÖRSÖKEN ÄR EXAKT 1 UPPFYLLER EGENSKAPERNA.

c) (BORDE VARIT b) FÖRSTÅS) $0 = P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$

$\therefore$ ÄR HÄNDELSERNA INTE OBEROENDE.

8 a. $P(X=k) = (1-p)^k \cdot p \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

(EFTERSOM KOMPLEMENTHÄNDELSEN TILL A MÅSTE INTRÄFFA I DE $k-1$ FÖRSTA FÖRSÖKEN OCH A I FÖRSÖK k FÖR ATT $\{X=k\}$ SKALL INTRÄFFA. $\Rightarrow$

$$P(\text{"}X \text{ UDDA"}) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^{2n} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

b. OM X_1 ÄR ANTALET FÖRSÖK T.O.M. FÖRSTA GÅNGEN A INTRÄFFAR OCH X_2 ÄR ANTALET FÖRSÖK EFTER DETTA T.O.M. ANDRA GÅNGEN A INTRÄFFAR SÅ BLIR X_1 OCH X_2 OBEROENDE MED FÖRDELNINGAR SOM X I a-UPPGIFTEN. $\Rightarrow$

$$P(Y \text{ UDDA}) = P(X_1 + X_2 \text{ UDDA}) = P(X_1 \text{ JÄMN OCH } X_2 \text{ UDDA}) + P(X_1 \text{ UDDA OCH } X_2 \text{ JÄMN})$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{(2-p)}\right) \cdot \frac{1}{(2-p)} = \frac{2(1-p)}{2-p}$$