Matematisk Statestik 19/3

Erik Broman, broman@chalmers.se

Sannolikhetsteori (LV 1-5)

i) "regler för hur vi ska modellera/räkna med slumpen

ii) utveckla matematiska modeller för slumpmässiga problem

Statistik (LV 6-9)

i) dra slutsatser från data

ii) testa hypoteser

Sannolikhetsteori

vår modell:

i) utfallsrummet $\Omega = \{$alla möjliga utfall av vår experiment$\}$.

ii) ett element $\omega \in \Omega$ är ett specifikt utfall.

iii) en händelse A är en samling utfall & utgör en delmängd av Ω.

iv) en funktion $\mathbb{P}: A \subseteq \Omega \to [0,1]$ som vi tolkar som sannolikheten för A.

Ex: kastar 6-sidig tärning

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, händelse $A = \{1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ (udda tal)

Funktionen $\mathbb{P}$ kallas för ett sannolikhetsmått & uppfyller alltid följande axiom:

1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) om A & B är disjunkta, då gäller att $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Om $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är disjunkta, så gäller att

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Kom ihåg:

i) $A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \ \& \ w \in B\}$

ii) $A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \ \&/\text{eller} \ w \in B\}$

iii) $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$

iv) $A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A, w \notin B\}$

vi skriver

v) $A \subset B$ om $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$

vi) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$ & B är disjunkta

Sats (räkneregler för $\mathbb{P}$)

$\forall A, B \subset \Omega$ gäller

i) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Bevis

i)

$C_1 = A \setminus B$, $C_2 = A \cap B$, $C_3 = B \setminus A$, dessa är disjunkta & $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Vi får $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + \mathbb{P}(C_2) =$

$\overset{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_2) \overset{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_2 \cup C_3) =$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

ii) $A \cup A^c = \Omega$

$1 \overset{\text{ax2}}{=} \mathbb{P}(\Omega) \overset{\text{ax3}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) om $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \overset{\text{ax3}}{=} \mathbb{P}(A) + \underset{\text{ax1: } \geq 0}{\mathbb{P}(B \setminus A)} \geq \mathbb{P}(A)$ ∎

Divisionsregeln: om alla utfall i Ω är lika sannolika så gäller $P(A) = \frac{\#\text{ utfall i } A}{\#\text{ utfall i } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ← storleken av

---

Tal: 5 familjer har 2 barn vardera

Familj nr.	1	2	3	4	5
	p	p	p	f	f
	f	f	f	f	f

a) välj familj slumpmässigt & låt $A = \{$den valda familjen har två flickor$\}$

b) välj en flicka slumpmässigt & låt $B = \{$den valda flickans familj har 2 flickor$\}$.

Lösning

a) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{5}$ b) $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{7}$ //

Lite kombinatorik

Ett experiment genomförs i k steg.

Låt N_l = # möjliga utfall i steg l.

Vi får då att $|\Omega| = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$

Låt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vara en mängd.

En permutation av A är ett ordnat arrangemang (dvs en lista) av objekten $a_1, \ldots, a_n$.

Ex: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, perm: (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2) osv.

I) på hur många sätt kan vi permutera A?

$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ (dvs $N_1 = n$, $N_2 = n-1$, osv)

II på hur många sätt kan vi välja k objekt ($k \leq n$) i A & lägga i ordning (dvs. hur många listor av längd $\underline{\underline{k}}$ kan vi skapa)?

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

III på hur många sätt kan vi välja k av objekten i A om vi ej tar hänsyn till ordningen?

(Vi säger att vi kombinerar de k objekten).

Enl II) är # listor av längd $k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

En specifik lista $(a_0, a_5, a_{17}, \ldots, a_6)$ ← (k objekt) kan permuteras på k! olika sätt. Alla dessa permutationer innehåller samma k objekt.

$\Rightarrow$ # kombinationer $= \frac{\#\text{listor}}{\#\text{permutationer}} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ kallas binomialkoeff.

"n choose k"

Tal: en löpartäviling har 52 deltagare. På hur många sätt kan topp-5 listan se ut?

L: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!}$

Tal: hur många pokerhänder finns det?

L: vi väljer 5 objekt ur en samling av 52, så blir svaret $\binom{52}{5}$

20/3 Betingade sannolikheter

Ex: vid en fartkontroll är hast. begr. 50 km/h. 32% av alla bilar kör fortare än 50 km/h & 4% av alla bilar kör fortare än 70 km/h Vad är andelen fortkörare som kör över 70 km/h?

Svar: $\frac{0.04}{0.32} = 0.125$

Dvs. sannolikheten att en slumpmässigt vald bil kör över 70 km/h givet att den kör över 50 km/h är 12,5%

Def Låt $A, B \subset \Omega$ s.a. $\mathbb{P}(B) > 0$.
Då är den betingade sannolikheten för A <u>givet</u> B

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

I vårt exempel är $A = \{\text{bil kör} > 70 \text{ km/h}\}$ & $B = \{\text{bil kör} > 50 \text{ km/h}\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{*}{=} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.04}{0.32} = 0.125$$

$* \; A \subset B$

Tal: kastar 2 tärningar. <u>Givet</u> ögonsumman = 4, vad är sannolikheten att vi slog minst en 3:a.

Lösn: har $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a \le 6, 1 \le b \le 6\}$, $B = \{\text{ögonsumma} = 4\} = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, $A = \{\text{minst en trea}\} = \{(1,3), (2,3), \dots, (6,3), (3,1), \dots, (3,6)\}$

Vi söker $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \left[A \cap B = \{(1,3), (3,1)\}\right]$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{36}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3} \quad //$$

Sats Givet $B \subset \Omega$ s.a. $P(B) > 0$, låt $\mathbb{P}'$ vara funktionen som för varje $A \subset \Omega$ tar värdet $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$. Då är $\mathbb{P}'$ ett sannolikhetsmått.

Bevis måste verifiera att $\mathbb{P}'$ uppfyller de tre axiomen för ett sannolikhetsmått, ska visa:

1) $\mathbb{P}'(A) \in [0,1]$ $\forall A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0 \quad \text{ty } \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$$

$$\mathbb{P}'(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 \quad \text{ty } A \cap B \subset B$$

2) $\mathbb{P}'(\Omega) = 1$:

$$\mathbb{P}'(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

3) $\mathbb{P}'(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}'(A_k)$ om $A_1, \dots, A_k, \dots$ disjunkta

har $$\mathbb{P}'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} \overset{*}{=} \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \mid B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}'(A_k)$$

Bevis av *

låt $w \in \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B \Rightarrow w \in B$ & $w \in A_n$ för ngt n.

$\Rightarrow w \in A_n \cap B \Rightarrow w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)$

resten övning

Tal: i en population är 20 % smittade av TBC. Ett snabbtest ger följande:

i) en smittad individ får pos. diagnos m. sannolikhet 0.9

ii) ej —//— neg. —//— 0.7

Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ får positiv diagnos?

Lösning: steg 1 - inför beteckningar

låt $S = \{$vald person smittad$\}$

$+ = \{$vald person får positiv diagnos$\}$

$- = \{$ —//— negativ —//— $\}$ $(= +^c)$

steg 2 - vad är känt?

$\mathbb{P}(+|S) = 0.9$ & $\mathbb{P}(-|S^c) = 0.7$ & $\mathbb{P}(S) = 0.2$

steg 3 - vad söks?

$\mathbb{P}(+)$. ger $\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+\cap S) + \mathbb{P}(+\cap S^c) = \frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(S)}\mathbb{P}(+\cap S) + \frac{\mathbb{P}(S^c)}{\mathbb{P}(S^c)}\mathbb{P}(+\cap S^c)$

$= \mathbb{P}(+|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(+|S^c)\mathbb{P}(S^c) = [\mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S)$ & $\mathbb{P}(+|S^c) = 1 - \mathbb{P}(-|S^c)]$

$= 0.9 \cdot 0.2 + (1-0.7)(1-0.2) = 0.42$ //

Anm: första likheten gäller då S & S^c är disjunkta & $\Omega = S \cup S^c$

Def $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är en partition av Ω om

i) de är disjunkta

ii) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

Sats Om $A_1, \ldots, A_n$ är en partition av Ω har vi att

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) \quad \forall B \subset \Omega$$

Den andra likheten gäller enbart om $\mathbb{P}(A_k) > 0 \; \forall k = 1, \ldots, n$

Anm: satsen kallas för LTP "law of total probability"

Bevis $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ snitten är disjunkta

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$ ∎

Bayes sats om $\mathbb{P}(A)>0$ & $\mathbb{P}(B)>0$ då gäller att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

Bevis $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ ∎

Sats Om $A_1, \dots, A_n$ är en partition av Ω

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

Beviset är övning!

Tal (forts)

a) givet att en person fått positiv diagnos, vad är sanno. att hen är smittad?

Lösning: söker $\mathbb{P}(S|+)$, $\mathbb{P}(S|+) = \mathbb{P}(+|S)\frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(+)} = 0.9\cdot\frac{0.2}{0.42} = \frac{3}{7}$

b) vad är sanno. att testet visar rätt?

Lösning: låt $R = \{\text{testet visar rätt}\}$.

$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R\cap +) + \mathbb{P}(R\cap -) = \mathbb{P}(S\cap +) + \mathbb{P}(S^c\cap -) = \mathbb{P}(+|S)\mathbb{P}(S) +$

$+ \mathbb{P}(-|S^c)\mathbb{P}(S^c) = 0.2\cdot 0.9 + 0.8\cdot 0.7 = 0.74$ //

21/3 Oberoende händelser

Intuitivt är A, B oberoende om

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \ \& \ \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Problem: kräver att $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, så ist

Def A, B oberoende om $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Följd Om $\mathbb{P}(B) > 0$ & A, B ober. $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \underset{\text{ober}}{=} \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad //$$

Def $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är (fullständigt) ober. om $\forall$ ändlig delmängd $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subset \mathbb{N}$, gäller att $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{j_k})$

Obs Oberoende är ej detsamma som disjunkt!

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ $\qquad$ $A \cap B = \emptyset$

Om A, B ober., A, C ober. & B, C ober. är då A, B, C ober.?

Svar nej!

Tal en krona singlas två gånger. Låt $A = \{1:\text{a kastet } H\}$, $B = \{2:\text{a kastet } H\}$, $C = \{\text{exakt 1 kast är } H\}$

a) visa A, B ober, A, C ober & B, C ober.

b) visa A, B, C ej ober.

$\mathcal{L}$ $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$, vi har $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((H,H)) = 1/4 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ så ober.

Vidare är $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((H,T),(T,H)) = 2/4 = 1/2$

$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}((H,T)) = 1/4 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ så A, C ober. p.s.s. B, C ober.

b) $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq 1/8 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

så A, B, C ej ober.

Tal Antag A, B ober. Visa att

a) A^c, B ober, b) A, B^c ober, c) A^c, B^c ober

L a) B: måste visa att $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$.

vi har $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \underset{A,B \text{ ober}}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) =$

$= \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^c)$ ■

b & c) övning

Tal parallell koppling

1) komponenterna fungerar ober. av varandra

2) systemet fungerar om minst en komp. funkar

3) komp. 1 fung. m.s. 1/2 & komp 2 m.s. 1/3

Vad är s.h att systemet fungerar?

L $A = \{\text{komp 1 fungerar}\}$, $B = \{\text{komp. 2 fungerar}\}$

Vet: $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$

Efterfrågas: $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$

$= 1 - (1 - 1/2)(1 - 1/3) = 2/3$

$\Omega = \{(F,S), (F,F), (S,F), (S,S)\}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

SLUMPVARIABLER

En slumpvariabel (stokastisk variabel, s.v.) är en funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Kan göras mer generellt, t.ex. $X = \{\text{färgen på ett draget kort}\}$

$X : \Omega \to \{\text{spader, hjärter, ruter, klöver}\}$

Ex: kastar tärning 2 ggr, X = ögonsumman, $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a \le 6, 1 \le b \le 6\}$

$X(a,b) = a + b$, $\{X = 5\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

Diskreta s.v.

Def en s.v. X är <u>diskret</u> om den enbart kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden.

A är uppräkneligt oändligt om man kan lista alla element i A $(a_1, a_2, \dots)$.
A är överuppräkneligt -//- <u>ej</u> kan lista -//-

Anm: vi kommer ofta betrakta $X: \Omega \to \mathbb{Z}$ $(X \in \mathbb{Z})$

Def antag att X kan anta värdena $x_1, x_2, x_3, \dots$ Då def. <u>sannolikhetsfunktionen</u> p_X (slf, pmf = pobability mass function) för X, som $p_X(x_j) = \mathbb{P}(X = x_j)$, där $j = 1, 2, \dots$

Anm: a) p_X ger oss alla sannolikheter för alla värden som X kan anta.
b) $p_X(x) = 0$ om $\nexists j$ s.a. $x = x_j$
c) ibland säger man att $\{\mathbb{P}(X = x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ är slf

---

Def Om $X \in \mathbb{R}$ def. <u>fördelningsfunktionen</u> (ffkn, cdf = cumulative distribution function) av $F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Tal en slant singlas 6 ggr. Låt $X = \#H$ & hitta slf samt skissa ffkn för X

$\mathcal{L}$ obs X kan anta $0, 1, \dots, 6$. $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{6}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2^6}\binom{6}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^6}\binom{6}{k}$ för $k = 0, 1, \dots, 6$ ← skriv vilka k, viktigt!

(underförstått $\mathbb{P}(X=k) = 0$ om $k \notin \{0, 1, \dots, 6\}$)
ty 2^{-6} = sanno. för ett fixt utfall & $\binom{6}{k}$ = # utfall med exakt k s.t. H

b) ffkn

$\mathbb{P}(X=3) = F(3.5) - F(2.5)$

Anm: 1) för en slf gäller alltid att $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$

($\mathbb{P}(\Omega)=1$ i förtäckt form)

2) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_j : x_j \leq x} \mathbb{P}(X = x_j)$, observerar att om vi har slf så vet vi ffkn.

3) $p_X(x_j) = F\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) - F\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)$ om $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$

Om $X : \Omega \to \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = F(k) - F(k-1)$

Informellt X motsvarar $f(x)$ i analysen. Att anger slf eller ffkn är att ange <u>fördelningen</u> av X & motsvarar att vi specificerar funk $f(x)$ (i.e $= \sin(x), e^x$)

Räkneövning 21/3

Lv1 Kombinatorik & sannolikhetsteori

Binomialkoefficienter

Antal sätt att välja k av n objekt, "n över k", $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Betingad Sannolikhet

$P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Lagen om total sannolikhet

$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

Mer generellt: Om $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ är en partition (dvs. $i \neq j$ $\Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$ & $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$), $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

Bayes Formel

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

Oberoende

A & B oberoende $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Intuitivt: A & B ober. $\Rightarrow P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

1.13 Poker

a) Sannolikhet för stege

Strategi: alla pokerhänder lika sannolika, så sannolikheten för stege är $\frac{\#\text{ händer som är stege}}{\#\text{ möjliga händer totalt}}$.

möjliga händer är # sätt att välja 5 kort från 52, dvs $\binom{52}{5}$

sätt att få stege: lägsta kortet kan vara ess, 2, 3, ..., 10 $\Rightarrow$ 10 olika. Varje kort kan vara av 4 olika färger $\Rightarrow 4^5$

$\Rightarrow P(\text{stege}) = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$

b) Sannolikhet för fyrtal

händer med fyrtal, 13 olika valörer, 5:e kortet vilket som helst av de 48 kvarvarande

$\Rightarrow P(\text{fyrtal}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$

c) Sannolikhet för kåk

13 valörer i triss, 1 av 4 ej med i triss.

12 valörer kvar för paret 2 av 4 färger med i paret

$\Rightarrow P(\text{kåk}) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

1.35 visa algebraiskt & genom att tolka betydelsen

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$. $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!} =$

$= \{x! = x(x-1)!\} = \frac{(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r(r-1)!} = \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!\,r(r-1)!}$

$= \frac{n(n-1)!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$

1.48 3 röda & 2 vita bollar i en urna. Dra först en boll. Lägg tillbaka den & en till i samma färg. Dra nu en ny boll.

a) Sannolikheten att få en vit boll vid andra dragningen?

Låt A vara händelsen att första bollen är vit.

Låt B -//- andra -//-

Lagen om total sannolikhet $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$

$P(A) = 2/5$, $P(A^c) = 3/5$, $P(B|A) = 3/6$, $P(B|A^c) = 2/6$

$P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{36} = \frac{2}{5}$

b) sannolikhet att första dragningen var röd om andra bollen var vit?

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

2.10 2 pers. spelar basket, skjuter varannan gång, slutar när någon gör mål.

Spelare A gör mål med sannolikhet P_1

-//- B -//- P_2

Ober. av föregående försök.

a) Slf för # skott

X = # skott. $P(X=k)=?$

k udda: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)(1-P_2)\ldots P_1 = ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}}P_1$

k jämn: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)\ldots P_2 = (1-P_1)^{\frac{k}{2}}(1-P_2)^{\frac{k}{2}-1}P_2$

$$\Rightarrow P(k) = P(X=k) = \begin{cases} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}}P_1 & \text{om } k=1,3,5,\ldots \\ (1-P_1)^{\frac{k}{2}}(1-P_2)^{\frac{k}{2}-1}P_2 & \text{om } k=2,4,6\ldots \end{cases}$$

b) sannolikhet att A vinner?

$P(\text{A vinner}) = P(\text{k udda}) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}}P_1 =$ [vill använda geometrisk serie, $r<1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$, låt $i = \frac{k-1}{2}$] $= P_1 \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^i =$

$$= P_1 \frac{1}{1-(1-P_1)(1-P_2)} = \frac{P_1}{P_1+P_2-P_1P_2}$$

2.20 2 askar innehåller n stickor vardera. Ta en sticka från slumpvis vald ask (båda askar lika sannolika). Upprepa tills vi försöker ta en sticka från en tom ask. Ange slf för K - antalet kvarvarande stickor i den andra asken.

Antag först att den ena asken har oändligt många stickor. Låt M vara antalet stickor vi tagit från den när vi upptäcker att den andra asken är tom.

Vi upptäcker att asken är tom då vi öppnat den n+1 ggr.

$$P(M=m)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m+n+1}$$

(vet att tomma asken valdes sista gången).

Låt nu båda innehålla n stickor, k kvar = tagit n-k

$$P(K=k)=P(M=n-k \mid M<n+1)=\frac{P(M=n-k \cap M<n+1)}{P(M<n+1)}\underset{\substack{M=n-k\\ \Rightarrow M<n+1}}{=}\frac{P(M=n-k)}{P(M<n+1)}=$$

$$=2P(M=n-k)=\binom{2n-k}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n-k}$$