Matematisk Statestik

19/3

Erik Broman, broman@chalmers.se

Sannolikhetsteori (LV1-5)

i) "regler för hur vi ska modellera/räkna med slumpen

ii) utveckla matematiska modeller för slumpmässiga problem

Statistik (LV6-9)

i) dra slutsatser från data

ii) testa hypoteser

Sannolikhetsteori

vår modell:

i) utfallsrummet $\Omega = \{$alla möjliga utfall av vår experiment$\}$.

ii) ett element $w \in \Omega$ där ett specifikt utfall.

iii) en händelse A är en samling utfall & utgör en delmängd av Ω.

iv) en funktion $\mathbb{P}: A \subseteq \Omega \to [0,1]$ som vi tolkar som sannolikheten för A.

Ex: kastar 6-sidig tärning

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, händelse $A = \{1\}$, $B = \{1,3,5\}$ (udda tal)

Funktionen $\mathbb{P}$ kallas för ett sannolikhetsmått & uppfyller alltid följande axiom:

1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) Om A & B är disjunkta, då gäller att $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Om $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är disjunkta, så gäller att,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Kom ihåg:

i) $A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \ \& \ w \in B\}$

ii) $A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \ \&/\text{eller} \ w \in B\}$

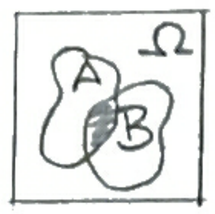
iii) $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$

iv) $A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A, w \notin B\}$

vi skriver

v) $A \subset B$ om $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$

vi) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$ & B är disjunkta



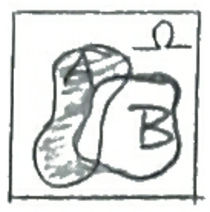
i)



ii)



iii)



iv)



v)



vi)

Sats (räkneregler för $\mathbb{P}$)

$\forall A, B \subset \Omega$ gäller

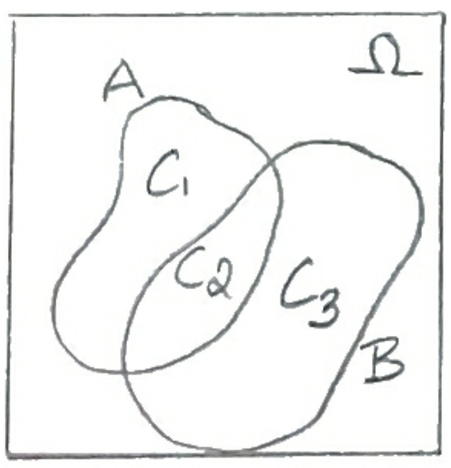
i) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Bevis

i)



$C_1 = A \setminus B$, $C_2 = A \cap B$, $C_3 = B \setminus A$, dessa är disjunkta & $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Vi får $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) + \mathbb{P}(C_2) =$

$\overset{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_2) \overset{\text{axiom 3}}{=} \mathbb{P}(C_1 \cup C_2) + \mathbb{P}(C_2 \cup C_3) =$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

ii) $A \cup A^c = \Omega$

$1 \overset{\text{ax2}}{=} \mathbb{P}(\Omega) \overset{\text{ax3}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) om $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \overset{\text{ax3}}{=} \mathbb{P}(A) + \underset{\text{ax1.} \geq 0}{\mathbb{P}(B \setminus A)} \geq \mathbb{P}(A)$ ∎

Divisionsregeln: om alla utfall i Ω är lika sannolika så gäller $P(A) = \frac{\#\text{utfall i } A}{\#\text{utfall i } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ← storleken av

---

Tal: 5 familjer har 2 barn vardera

Familj nr.	1	2	3	4	5
	p	p	p	f	f
	f	f	f	f	f

a) välj familj slumpmässigt & låt A = {den valda familjen har två flickor}

b) välj en flicka slumpmässigt & låt B = {den valda flickans familj har 2 flickor}.

Lösning

a) ~~$P(A) =$~~ $\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{5}$ b) $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{7}$ //

Lite kombinatorik

Ett experiment genomförs i k steg.

Låt N_l = #möjliga utfall i steg l.

Vi får då att $|\Omega| = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_k$

Låt $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vara en mängd.

En permutation av A är ett ordnat arrangemang (dvs en lista) av objekten $a_1, \ldots, a_n$.

Ex: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, perm: $(a_1, a_0, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_1, a_2)$ osv.

I) på hur många sätt kan vi permutera A?

$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ (dvs $N_1 = n$, $N_2 = n-1$, osv)

II på hur många sätt kan vi välja k objekt ($k \leq n$) i A & lägga i ordning (dvs. hur många listor av längd $\underline{k}$ kan vi skapa)?

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

III på hur många sätt kan vi välja k av objekten
i A om vi ej tar hänsyn till ordningen?
(Vi säger att vi kombinerar de k objekten).
Enl II) är # listor av längd $k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
En specifik lista $(a_9, a_5, a_{17}, \dots, a_6)$ ← (k objekt) kan permuteras på k! olika sätt. Alla dessa permutationer innehåller samma k objekt.

$\Rightarrow$ # kombinationer $= \frac{\#\text{listor}}{\#\text{permutotioner}} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ kallas binomialkoeff.
"n choose k"

Tal: en löpartävling har 52 deltagare. På hur många sätt kan topp-5 listan se ut?

$\mathcal{L}$: $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!}$ ✓

Tal: hur många pokerhänder finns det?

$\mathcal{L}$: vi väljer 5 objekt ur en samling av 52, så blir svaret $\binom{52}{5}$ ✓

20/3 Betingade sannolikheter

Ex: Vid en fartkontroll är hast. begr. 50 km/h. 32% av alla bilar kör fortare än 50km/h & 4% av alla bilar kör fortare än 70km/h Vad är andelen fortkörare som kör över 70 km/h?

Svar: $\frac{0.04}{0.32} = 0.125$

Dvs. sannolikheten att en slumpmässigt vald bil kör över 70 km/h givet att den kör över 50km/h är 12,5%

Def Låt $A, B \subset \Omega$ s.a. $\mathbb{P}(B) > 0$.

Då är den betingade sannolikheten för A givet B

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

I vårt exempel där $A = \{\text{bil kör} > 70\text{km/h}\}$ & $B = \{\text{bil kör} > 50\text{km/h}\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{*}{=} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.04}{0.32} = 0.125$$

$* A \subset B$

Tal: kastar 2 tärningar. Givet ögonsumman = 4, vad är sannolikheten att vi slog minst en 3:a.

$\mathcal{L}$: har $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a \le 6,\ 1 \le b \le 6\}$, $B = \{\text{ögonsumma} = 4\} =$

$= \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$, $A = \{\text{minst en trea}\} = \{(1,3), (2,3), \ldots, (6,3), (3,1), \ldots, (3,6)\}$

Vi söker $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \left[A \cap B = \{(1,3), (3,1)\}\right]$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{36}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{2}{3} \quad //$$

Sats Givet $B \subset \Omega$ s.a. $P(B) > 0$, låt P' vara funktionen som för varje $A \subset \Omega$ tar värdet $P'(A) = P(A \mid B)$. Då är P' ett sannolikhetsmått.

Bevis måste verifiera att P' uppfyller de tre axiomen för ett sannolikhetsmått, ska visa:

1) $P'(A) \in [0,1]$ $\forall A \subset \Omega$:

$$P'(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad \text{ty} \quad P(A \cap B) \geq 0$$

$$P'(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \text{ty} \quad A \cap B \subset B$$

2) $P'(\Omega) = 1$:

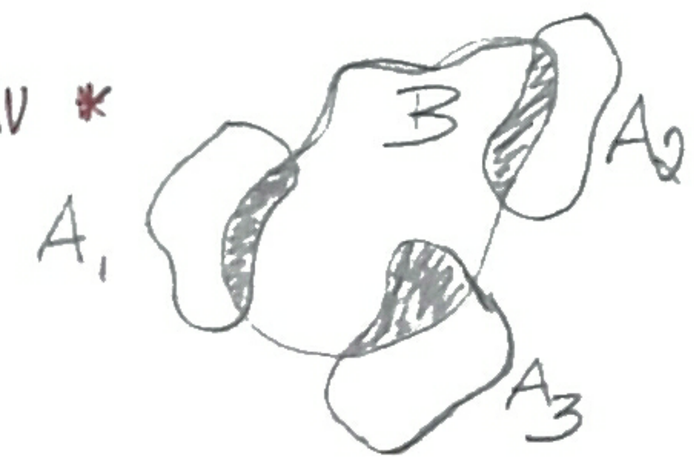
$$P'(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $P'(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P'(A_k)$ om $A_1, \ldots, A_k, \ldots$ disjunkta

har $P'(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \frac{P((\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B)}{P(B)} \overset{*}{=} \frac{P(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap B)}{P(B)} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \mid B) = \sum_{k=1}^{\infty} P'(A_k)$$

Bevis av *



låt $w \in (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B \Rightarrow w \in B$ & $w \in A_n$ för ngt n.

$\Rightarrow w \in A_n \cap B \Rightarrow w \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)$

resten övning

Tal: i en population är 20 % smittade av TBC. Ett snabbtest ger följande:

i) en smittad individ får pos. diagnos m. sannolikhet 0.9

ii) ej -"- neg. -"- 0.7

Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald individ får positiv diagnos?

Lösning: steg 1 - inför beteckningar

låt $S = \{$vald person smittad$\}$

$+ = \{$vald person får positiv diagnos$\}$

$- = \{$ -//- negativ -//- $\}$ $(= +^c)$

steg 2 - vad är känt?

$\mathbb{P}(+|S) = 0.9$ & $\mathbb{P}(-|S^c) = 0.7$ & $\mathbb{P}(S) = 0.2$

steg 3 - vad söks?

$\mathbb{P}(+)$. ger $\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+ \cap S) + \mathbb{P}(+ \cap S^c) = \frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(S)}\mathbb{P}(+ \cap S) + \frac{\mathbb{P}(S^c)}{\mathbb{P}(S^c)}\mathbb{P}(+ \cap S^c)$

$= \mathbb{P}(+|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(+|S^c)\mathbb{P}(S^c) = \left[\mathbb{P}(S^c) = 1 - \mathbb{P}(S) \;\&\; \mathbb{P}(+|S^c) = 1 - \mathbb{P}(-|S^c)\right]$

$= 0.9 \cdot 0.2 + (1 - 0.7)(1 - 0.2) = 0.42$ //

Anm: första likheten gäller då S & S^c är disjunkta & $\Omega = S \cup S^c$

Def $A_1, A_2, \ldots, A_n$ är en partition av Ω om

i) de är disjunkta

ii) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

Sats Om $A_1, \ldots, A_n$ är en partition av Ω har vi att

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) \quad \forall B \subset \Omega$$

Den andra likheten gäller enbart om $\mathbb{P}(A_k) > 0 \; \forall k = 1, \ldots, n$

Anm: satsen kallas för LTP "law of total probability"

Bevis $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ snitten är disjunkta

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Bayes sats om $\mathbb{P}(A)>0$ & $\mathbb{P}(B)>0$ då gäller att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

Bevis $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ ∎

Sats Om $A_1,\dots,A_N$ är en partition av Ω

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

Beviset är övning!

Tal (forts)

a) Givet att en person fått positiv diagnos, vad är sanno. att hen är smittad?

L: söker $\mathbb{P}(S|+)$, $\mathbb{P}(S|+) = \mathbb{P}(+|S)\frac{\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(+)} = 0.9\cdot\frac{0.2}{0.42} = \frac{3}{7}$

b) vad är sanno. att testet visar rätt?

L: låt $R = \{\text{testet visar rätt}\}$.

$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R\cap+) + \mathbb{P}(R\cap-) = \mathbb{P}(S\cap+) + \mathbb{P}(S^c\cap-) = \mathbb{P}(+|S)\mathbb{P}(S) +$

$+\mathbb{P}(-|S^c)\mathbb{P}(S^c) = 0.2\cdot0.9 + 0.8\cdot0.7 = 0.74$ //

Räkneövning 21/3

Lv1 Kombinatorik & sannolikhetsteori

Binomialkoefficienter

Antal sätt att välja k av n objekt, "n över k", $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Betingad Sannolikhet

$P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Lagen om total sannolikhet

$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

Mer generellt: Om $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ är en partition (dvs. $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$ & $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$), $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

Bayes Formel

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

Oberoende

A & B oberoende $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Intuitivt: A & B ober. $\Rightarrow P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

1.13 Poker

a) Sannolikhet för stege

Strategi: alla pokerhänder lika sannolika, så sannolikheten för stege är $\frac{\#\text{ händer som är stege}}{\#\text{ möjliga händer totalt}}$.

möjliga händer är # sätt att välja 5 kort från 52, dvs $\binom{52}{5}$

sätt att få stege: lägsta kortet kan vara ess, 2, 3, ..., 10

$\Rightarrow$ 10 olika. Varje kort kan vara av 4 olika färger $\Rightarrow 4^5$

$\Rightarrow P(\text{stege}) = \frac{10 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$

b) Sannolikhet för fyrtal

händer med fyrtal, 13 olika valörer, 5:e kortet vilket som helst av de 48 kvarvarande

$\Rightarrow P(\text{fyrtal}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}}$

c) Sannolikhet för kåk

13 valörer i triss, 1 av 4 ej med i triss.

12 valörer kvar för paret 2 av 4 färger med i paret

$\Rightarrow P(\text{kåk}) = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

1.35 Visa algebraiskt & genom att tolka betydelsen

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$. $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!} =$

$= \{x! = x(x-1)!\} = \frac{(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!\,(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!\,r(r-1)!} = \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!\,r(r-1)!}$

$= \frac{n(n-1)!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$

1.48 3 röda & 2 vita bollar i en urna. Dra först en boll. Lägg tillbaka den & en till i samma färg. Dra nu en ny boll.

a) Sannolikheten att få en vit boll vid andra dragningen?

Låt A vara händelsen att första bollen är vit.

Låt B -"- andra -"-

Lagen om total sannolikhet $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$

$P(A) = 2/5$, $P(A^c) = 3/5$, $P(B|A) = 3/6$, $P(B|A^c) = 2/6$

$P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

b) sannolikhet att första dragningen var röd om andra bollen var vit?

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

2.10 2 pers. spelar basket, skjuter varannan gång, slutar när någon gör mål.

Spelare A gör mål med sannolikhet P_1

-//- B -//- P_2

Ober. av föregående försök.

a) Slf för # skott

X = # skott. $P(X=k)=?$

k udda: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)(1-P_2)\ldots P_1 = ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1$

k jämn: $P(X=k) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)\ldots P_2 = (1-P_1)^{\frac{k}{2}}(1-P_2)^{\frac{k}{2}-1}P_2$

$$\Rightarrow P(k) = P(X=k) = \begin{cases} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1 & \text{om } k=1,3,5,\ldots \\ (1-P_1)^{\frac{k}{2}}(1-P_2)^{\frac{k}{2}-1}P_2 & \text{om } k=2,4,6\ldots \end{cases}$$

b) sannolikhet att A vinner?

$$P(\text{A vinner}) = P(\text{k udda}) = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^{\frac{k-1}{2}} P_1 = \left[\text{vill använda geometrisk serie, } r<1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}, \text{ låt } i = \frac{k-1}{2}\right] = P_1 \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\infty} ((1-P_1)(1-P_2))^i =$$

$$= P_1 \frac{1}{1-(1-P_1)(1-P_2)} = \frac{P_1}{P_1+P_2-P_1P_2}$$

2.20 2 askar innehåller n stickor vardera. Ta en sticka från slumpvis vald ask (båda askar lika sannolika). Upprepa tills vi försöker ta en sticka från en tom ask. Ange slf för K - antalet kvarvarande stickor i den andra asken.

Antag först att den ena asken har oändligt många stickor. Låt M vara antalet stickor vi tagit från den när vi upptäcker att den andra asken är tom.
Vi upptäcker att asken är tom då vi öppnat den n+1 ggr.

$$P(M=m)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n+1}$$

(vet att tomma asken valdes sista gången).
Låt nu båda innehålla n stickor, k kvar = tagit n-k

$$P(K=k)=P(M=n-k \mid M<n+1)=\frac{P(M=n-k \cap M<n+1)}{P(M<n+1)} \underset{\substack{M=n-k \\ \Rightarrow M<n+1}}{=} \frac{P(M=n-k)}{P(M<n+1)}=$$

$$=2P(M=n-k)=\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

26/3 Diskreta slumpvariabler

Väntevärde & varians

Def väntevärdet av en diskret s.v. $X: \Omega \to \{x_1, x_2, \dots\}$ betecknas $\mathbb{E}[X]$ (Expectation) & ges av $\mathbb{E}[X] = \sum_{x_j} x_j \mathbb{P}(X = x_j)$

Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. vi $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x_j} f(x_j)\, \mathbb{P}(X = x_j)$

Def variansen av en s.v. X def. som $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Anm. 1) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[f(X)]$, $\mathrm{Var}(X)$ etc. kan bli $\pm\infty$.

2) $\mathrm{Var}(X)$ = "förväntad kvadratisk avvikelse från väntevärdet (tyngdpunkten)"

Sats - Räkneregler för $\mathbb{E}$

Låt X, Y vara 2 diskreta s.v. & låt $a \in \mathbb{R}$, då har vi

i) $\mathbb{E}[aX] = a\,\mathbb{E}[X]$

ii) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

} linjäritet

Bevis

i) $\mathbb{E}[aX] = \sum_{x_j} a x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) = a \sum_{x_j} x_j\, \mathbb{P}(X = x_j) = a\,\mathbb{E}[X]$

ii) Antag att $X, Y \in \mathbb{Z}$

Här kan vi ta $\Omega = \{(m,n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Vi skriver $\{X = m, Y = n\} = \{X = m \ \& \ Y = n\} = \{X = m\} \cap \{Y = n\}$.

Vi har $\{X = m\} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{X = m, Y = n\}$, s.a. $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{X = m, Y = n\}\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = n)$

(disjunkta, ty olika n)

Ex: X, Y är resultaten av 2 tärningskast

$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=3, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=2) + \dots + \mathbb{P}(X=3, Y=6)$

Vi får $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X+Y=k) =$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k-l+l)\,\mathbb{P}(X=k-l, Y=l) = \{m=k-l \ \& \ n=l\} =$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (m+n)\,\mathbb{P}(X=m, Y=n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=m, Y=n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X=m, Y=n)$

$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\,\mathbb{P}(X=m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ ∎

Anm: 1) ett allmänt bevis är tekniskt mer jobbigt, men idén är densamma.

2) p.s.s. om $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ får vi
$\mathbb{E}[af(X) + bg(X)] = a\mathbb{E}[f(X)] + b\mathbb{E}[g(X)]$

Tal: Låt $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ vara resultaten av 100 tärningskast.
Beräkna $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{100} X_k]$.

1 metod 1 låt $Z = \sum_{k=1}^{100} X_k$. Beräkna $\mathbb{P}(Z=100), \mathbb{P}(Z=101), \dots, \mathbb{P}(Z=600)$
för att sedan räkna ut $\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=100}^{600} k\,\mathbb{P}(Z=k)$

metod 2 vi har $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{100} X_k] = \sum_{k=1}^{100} \mathbb{E}[X_k] = 100\,\mathbb{E}[X_1] =$
$100 \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X_1=k) = 100 \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = 350.$ ∎

Sats Om X är en S.V. där $|\mathbb{E}[X]| < \infty$ & $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ så gäller
i) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
ii) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Bevis
i) låt $\mu = \mathbb{E}[X]$.
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 + \mu^2 - 2X\mu] =$
$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[\mu^2] - 2\mu\,\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] + \mu^2 - 2\mu\cdot\mu = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2 =$
$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

ii) $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])^2] =$

$= \mathbb{E}[(aX-a\mathbb{E}[X])^2] = a^2\,\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = a^2\mathrm{Var}(X)$ ∎

Anm: $\mathrm{Var}(X) \geq 0$. Om $\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ är konstant.

Några diskreta standardfördelningar

Vi gör ett experiment som kan lyckas/misslyckas, med sannolikhet p resp. $1-p$. Låt $X=1$ om lyckas, annars 0.

S.v. X är då Bernoulli-fördelad m parameter p. ($X \sim \mathrm{Be}(p)$).

Vi har $\mathbb{E}[X] = 1\cdot\mathbb{P}(X=1) + 0\cdot\mathbb{P}(X=0) = p$ //

Tal antag att vi gör n oberoende försök, där varje försök lyckas m.s. p (& annars misslyckas). Låt X = #lyckade försök. Bestäm slf för X (≡bestäm fördelningen)

L Vi ska beräkna $\mathbb{P}(X=k)$ $\forall k$. Har att $\mathbb{P}(X=k)$ = (# försöks-sekvenser med exakt k lyckade försök) × (sanno. för en fix sekvens med exakt k lyckade försök) = $A\cdot B$.

Försök nr.	1	2	3	4 ...	$n-1$	n
exakt k lyckade	L	m	m	L	L	m
sanno för denna seku.	p	$1-p$	$1-p$	p	p	$1-p$

L = lyckade
m = misslyckade

dvs. $B = p^k(1-p)^{n-k}$. Vi får att $A = \binom{n}{k}$ = # sätt välja k ur n.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$ //

Def en s.v. X är Binomialfördelad med parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ & $0<p<1$. ($X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$) om $\mathbb{P}(X) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$

Tal låt $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, beräkna $\mathbb{E}[X]$

L metod 1 $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \dots$ räkna som en gaining ... = ?

$$= \frac{1}{8}\Gamma(7/2) - 2\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) = \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8}\Gamma(5/2) - 2\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) =$$

$$= \frac{3}{4}\Gamma(5/2) + \Gamma(3/2) = \frac{-1}{8}\Gamma(3/2) = \frac{-1}{8}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fourier!

$$C_0 = (\sqrt{x}, 1)_w = \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\,dx = \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$P(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-x) - \frac{\sqrt{\pi}}{16}\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)$$

---

metod 2 låt $X_k = \begin{cases} 1 & \text{om exp. nr k lyckas} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ = # lyckade försök

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = n\,\mathbb{E}[X_1] = np$ //

21/3 Oberoende händelser

Intuitivt är A, B oberoende om

$$P(A|B) = P(A) \;\&\; P(B|A) = P(B).$$

Problem: kräver att $P(A), P(B) > 0$, så ist

Def A, B oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Följd Om $P(B) > 0$ & A, B ober. $\Rightarrow$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{ober}}{=} \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \quad //$$

Def $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är (fullständigt) ober. om $\forall$ ändlig delmängd $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subset \mathbb{N}$, gäller att $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k}) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{j_k})$

Obs Oberoende är ej detsamma som disjunkt!

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ $\qquad$ $A \cap B = \emptyset$

Om A, B ober., A, C ober. & B, C ober. är då A, B, C ober.?

Svar nej!

Tal en krona singlas två gånger. Låt $A = \{1{:}a \text{ kastet } H\}$,

$B = \{2{:}a \text{ kastet } H\}$, $C = \{\text{exakt 1 kast är } H\}$

a) visa A, B ober, A, C ober & B, C ober.

b) visa A, B, C ej ober.

$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$, vi har $P(A) = P(B) = 1/2$

$P(A \cap B) = P((H,H)) = 1/4 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ så ober.

Vidare är $P(C) = P((H,T), (T,H)) = 2/4 = 1/2$

$P(A \cap C) = P((H,T)) = 1/4 = P(A)P(C)$ så A, C ober. p.s.s. B, C ober.

b) $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C)$

så A, B, C ej ober.

Tal Antag A, B ober. Visa att

a) A^c, B ober, b) A, B^c ober, c) A^c, B^c ober

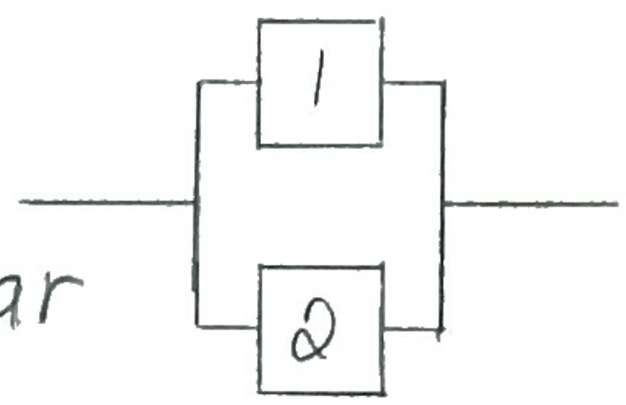
L a) B: måste visa att $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$.

vi har $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \underset{A,B \text{ ober}}{=} P(B) - P(A)P(B) =$

$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c)$ ▨

b & c) "övning"

Tal parallell koppling



1) komponenterna fungerar ober. av varandra

2) systemet fungerar om minst en komp. funkar

3) komp. 1 fung. m.s. 1/2 & komp 2 m.s. 1/3

Vad är s.h att systemet fungerar?

L $A = \{$komp 1 fungerar$\}$, $B = \{$komp. 2 fungerar$\}$

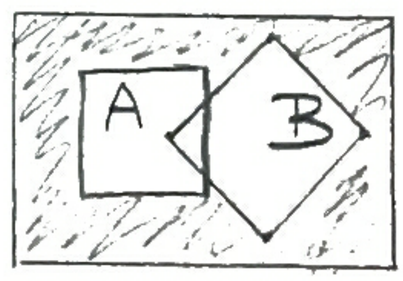
Vet: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$

Efterfrågas: $P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)P(B^c)$

$= 1 - (1 - 1/2)(1 - 1/3) = 2/3$

$\Omega = \{(F,S), (F,F), (S,F), (S,S)\}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



SLUMPVARIABLER

En slumpvariabel (stokastisk variabel, s.v.) är en funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Kan göras mer generellt, t.ex. $X = \{$färgen på ett draget kort$\}$

$X: \Omega \to \{$spader, hjärter, ruter, klöver$\}$

Ex: kastar tärning 2 ggr, $X =$ ögonsumman, $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a \le 6, 1 \le b \le 6\}$

$X(a,b) = a + b$, $\{X = 5\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

Diskreta s.v.

Def en s.v. X är <u>diskret</u> om den enbart kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden.

A är uppräkneligt oändligt om man kan lista alla element i A $(a_1, a_2, \dots)$.
A är överuppräkneligt -"- <u>ej</u> kan lista -"-

Anm: vi kommer ofta betrakta $X: \Omega \to \mathbb{Z}$ $(X \in \mathbb{Z})$

Def antag att X kan anta värdena $x_1, x_2, x_3, \dots$ Då def. <u>sannolikhetsfunktionen</u> p_X (slf, pmf = pobability mass function) för X, som $p_X(x_j) = \mathbb{P}(X = x_j)$, där $j = 1, 2, \dots$

Anm: a) p_X ger oss alla sannolikheter för alla värden som X kan anta.

b) $p_X(x) = 0$ om $\nexists j$ s.a. $x = x_j$

c) ibland säger man att $\{\mathbb{P}(X = x_j)\}_{j=1}^{\infty}$ är slf

---

Def Om $X \in \mathbb{R}$ def. <u>fördelningsfunktionen</u> (ffkn, caf = cumulative distribution function) av $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Tal en slant singlas 6 ggr. Låt $X = \#H$ & hitta slf samt skissa ffkn för X

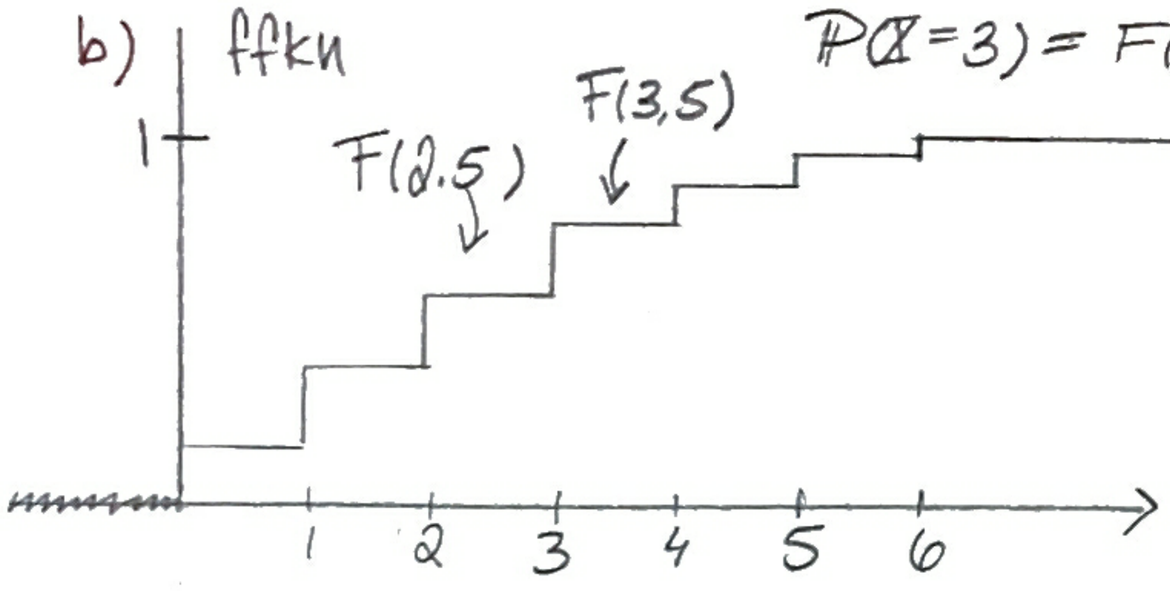
$\mathcal{L}$ obs X kan anta $0, 1, \dots, 6$. $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=1) = \frac{6}{2^6}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2^6}\binom{6}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^6}\binom{6}{k}$ för $k = 0, 1, \dots, 6$ ← skriv vilka k, viktigt!

(underförstått $\mathbb{P}(X=k) = 0$ om $k \notin \{0, 1, \dots, 6\}$)

ty 2^{-6} = sanno. för ett fixt utfall & $\binom{6}{k}$ = # utfall med exakt k s.t. H

b) ffkn



$\mathbb{P}(X=3) = F(3.5) - F(2.5)$

Anm: 1) för en slf gäller alltid att $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$

($\mathbb{P}(\Omega)=1$ i förtäckt form)

2) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_j : x_j \leq x} \mathbb{P}(X=x_j)$, observerar att om vi har slf så° vet vi ffkn.

3) $p_X(x_j) = F\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) - F\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)$ om $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$

Om $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = F(k) - F(k-1)$

Informellt X motsvarar $f(x)$ i analysen. Att anger slf eller ffkn är att ange <u>fördelningen</u> av X & motsvarar att vi specificerar funk $f(x)$ (i.e $= \sin(x), e^x$)

2018 03 27 Fler standardfördelningar

Ofta har vi i fallet $Bin(n,p)$ n mkt stort, p mkt litet

Tal radioaktivt prov med $n = 10^{20}$ klyvbara atomkärnor. Under en sekund är sanno. att en fix kärna sönderfaller $3\cdot 10^{-19}$. Vad är sanno. att högst 5 kärnor sönderfaller under en sekund? Antag ej kedjereaktion.

L låt X = # sönderfall under en fix sekund. Vet att $X \sim Bin(10^{20}, 3\cdot 10^{-19})$. Vi söker $P(X \le 5) = (1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}} + 10^{20}(1-3\cdot 10^{-19})^{10^{20}-1}\cdot 3\cdot 10^{-19} + \dots$ korrekt men krångligt!

Def X är Poission-fördelad med parameter $\lambda > 0$ ($X \sim Poi(\lambda)$) om $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (0 för alla andra värden på k)

Anm: $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!\, e^{-\lambda} = e^{\lambda}e^{-\lambda} = 1$

Sats Om $X_n \sim Bin(n, p_n)$ där $np_n \to \lambda$, $n \to \infty$ så gäller $\forall k$ $P(X_n = k) \to P(X = k)$, $n \to \infty$ där $X \sim Poi(\lambda)$

Bevis Fixera k.

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!\, n^k} (np_n)^k (1-p_n)^{n-k}$$

1) $(np_n)^k \to \lambda^k$

2) $(1-p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda}$ $\boxed{(1+a_n)^{b_n} \to e^c \text{ om } a_n b_n \to c \text{ & } a_n \to 0}$

3) $\frac{n!}{(n-k)!\, n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\dots\cdot\frac{n-k+1}{n} \to 1$

$\Rightarrow P(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ∎

L (alt.) Vi antar $X \sim Poi(\lambda)$ där $\lambda = np$ (en approx.) $\lambda = 30$.

$\Rightarrow P(X \le 5) = e^{-30} + 30e^{-30} + \frac{30}{2!}e^{-30} \dots$

Tal Emilia skjuter straffar. Varje straff träffar oberoende m.s. p. Låt X = #försök som hon behöver t.o.m. första träffen. Hitta sf för X.

Lösning $\mathbb{P}(X=k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1 \text{ missar}} \underbrace{p}_{\text{träff}}$ $k=1,2,3,\dots$

Def X är geometriskt fördelad m. parameter p, $0<p<1$, ($X \sim \text{geom}(p)$) om $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,3$

OBS! Det kan variera!

Tal Som ovan men X = #försök t.o.m. träff nr. r.

Lösning om $X=k$ måste straff nr. k vara träff nr. r. Dessutom måste $r-1$ av de föregående $n-1$ straffarna vara träffar. En fix sekvens med $r-1$ träffar & $(k-1)-(r-1)=k-r$ bommar har sanno. $p^{r-1}(1-p)^{k-r}$. Vi får då $\mathbb{P}(X=k)$ = (#sekvenser) · (sanno. för en fix sådan sekv.) · (sanno. sista träff) =

$$= \binom{k-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r}\, p = \binom{k-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{k-r}$$

Def X är neg. binomialförd. m. param r, p ($X \sim \text{NegBin}(r,p)$) om $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{k-r}$

Kontinuerliga slumpvariabler

Def en s.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ kallas kont. om $\exists f: \mathbb{R} \to [0,\infty): \forall t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

Anm: 1) funk. $f(s)$ kallas täthetsfunktionen (tfk, pdf = probability density function) & $F(t) := \mathbb{P}(X \le t)$ är fördelningsfunktionen

2) Vi har $F'(t) = f(t)$ & $\mathbb{P}(t \le X \le t+h) =$

$= F(t+h) - F(t) \approx h F'(t) = hf(t)$

3) $f(t)$ alt. $F(t)$ anger/bestämmer fördelningen för motsvarande kont. s.v.

4) Vi har alltid att $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = 1$ ty $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(-\infty < \Omega < \infty)$.

5) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 0$ & $\lim F(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = 1$.

Dessutom gäller för $h \ge 0$ $F(h+t) = F(t) = \int_{t}^{t+h} f(s)\,ds \ge 0$.

$\Rightarrow F(t)$ är icke-avtagande.

6) Vi har att $\mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(\{X<b\} \setminus \{X<a\}) = \mathbb{P}(X<b) - \mathbb{P}(X<a) =$

$= \int_{-\infty}^{b} f(s)\,ds - \int_{-\infty}^{a} f(s)\,ds = \int_{a}^{b} f(s)\,ds$ om $a<b$

7) $\mathbb{P}(X=a) = \int_{a}^{a} f(s)\,ds = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X \le a)$.

Def om X har funk.en $f(s)$ def. vi väntevärdet ($\mathbb{E}[X]$) av X genom $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} s\, f(s)\,ds$.

Om $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def vi $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) f(s)\,ds$.

Variansen ($\mathrm{Var}(X)$) def. av $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (s - \mathbb{E}[X])^2 f(s)\,ds$

Som för diskreta s.v. i) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

ii) $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$

iii) $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$

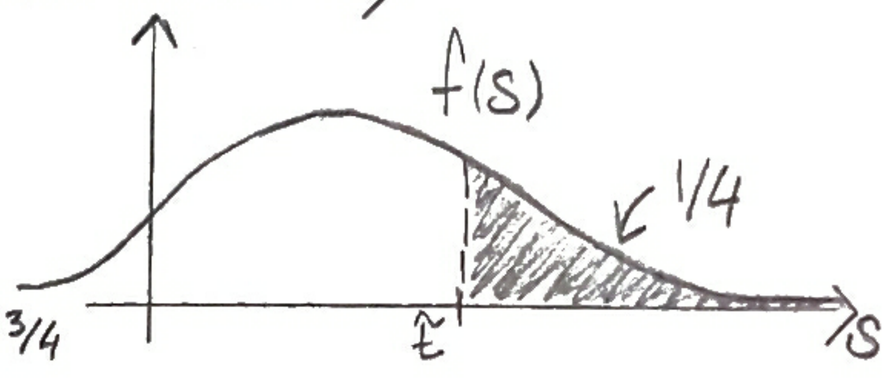
Def för $0 < \alpha < 1$ def α-kvantiteten t_α som lösningen till $F(t_\alpha) = 1 - \alpha$.

Ex: $t_{1/2}$: $\mathbb{P}(X \le t_{1/2}) = \mathbb{P}(X \ge t_{1/2}) = 1/2$ (medianen)

$t_{1/4}$: övre kvartilen

$t_{3/4}$: undre kvartilen

$\mathbb{P}(X \le \tilde{t}) = 3/4 = 1 - 1/4 \Rightarrow \tilde{t} = t_{3/4}$



2813 Def. en s.v. X är exponentialfördelad med parametern $\lambda > 0$ ($X \sim Exp(\lambda)$) om $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$

Anm: $f(t) = 0$ för $t \leq 0$, underförstått!

Användning låt T = tiden för en kol-14 atom att sönderfalla.
Då är $T \sim Exp(\lambda)$

Tal hitta $t_{1/2}$ för $T \sim Exp(\lambda)$

$$\frac{1}{2} = F(t_{1/2}) = \int_{-\infty}^{t_{1/2}} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(s)}_{=0}\,ds + \int_0^{t_{1/2}} f(s)\,ds = \int_0^{t_{1/2}} \lambda e^{-\lambda s}\,ds \quad \leftarrow \text{def. område viktigt!}$$

$$= \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^{t_{1/2}} = 1 - e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2 \Rightarrow -\lambda t_{1/2} = \log 1/2 = -\log 2 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda} \quad //$$

Tal en sönderfallstid $T \sim Exp(\lambda)$. Vilken är den förväntade livslängden?

Söker $E[T]$, har $E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s)\,ds = \int_0^{\infty} s e^{-\lambda s}\,ds = \left[-s e^{-\lambda s}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}\,ds =$

$$= 0 + \left[\frac{-e^{-\lambda s}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \quad //$$

Funktioner av slumpvariabler

Om X är en s.v. & $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kan vi def. en ny s.v. $Y = g(X)$.
Om X har känd fördelning (slf, tfkn, ffkn), vilken fördelning har då Y?

standardfel!

Då X har tfkn $f_X(s)$ har Y tfkn ~~$f_Y(s) = g(f_X(s))$~~ inte sant ty

i) om $g \equiv 0 \Rightarrow Y \equiv 0$, $g(f_X(s)) = 0$

ii) om $g < 0$, då blir $g(f_X(s)) < 0$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(f_X(s))\,ds \neq 1$

Ist går vi via ffkn

$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(g(X) \le t)$ " = " $P(X \le g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t))$

Vi får sedan att $f_Y(t) = F_Y'(t)$.

Tal låt $X \sim Exp(\lambda)$. Bestäm fördelningen för X/r där $r>0$.

Låt $F_{X/r}(t) = P(\frac{X}{r} \le t) = P(X \le rt) = F_X(rt)$.

Vidare är $F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\,ds = \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ $t>0$.

$\Rightarrow F_{X/r}(t) = F_X(rt) = 1 - e^{-\lambda r t}$ $t>0$

$\Rightarrow f_{X/r}(t) = F'_{X/r}(t) = \lambda r e^{-\lambda r t}$ $t>0$

$\Rightarrow X/r \sim Exp(\lambda r)$ //

Def X är likformigt fördelad på intervallet $[a,b]$ där $a<b$ ($X \sim U[a,b]$) om $f(s) = \frac{1}{b-a}$ för $s \in [a,b]$

Def låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara någon mängd. Den diskreta s.v. X är likformigt fördelad på mängden A om $P(X = a_k) = \frac{1}{|A|}$ $k = 1, 2, \dots, n$, skriver $X \sim U(A)$

Tal låt $X \sim U[-1,1]$. Vilken tfkn har X^2?

Låt vi har att $X^2 \ge 0 \Rightarrow f_{X^2}(t) = 0$ för $t<0$.

För $0 \le t \le 1$ har vi att $F_{X^2}(t) = P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) =$

$= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s)\,ds = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{2}\,ds = \sqrt{t}$

$\Rightarrow f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $0 \le t \le 1$.

Slutligen för $t>1 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 1 \Rightarrow F'_{X^2}(t) = 0$ för $t>1$.

Svar: $f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $0 \le t \le 1$.

Följande satser är användbara för att generera s.v. med önskad ffkn. Här antas F vara strikt växande på sitt def.-område

Sats Om X har ffkn $F(t)$ & $Z = F(X)$, då är $Z \sim U[0,1]$.

Bevis $\mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(F(X) \le z) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(z)) = F(F^{-1}(z)) = z$

för $0 \le z \le 1$. Så $F_Z(z) = z$, så $Z \sim U[0,1]$ (kolla övning) ∎

Sats Låt $U \sim U[0,1]$ & låt $X = F^{-1}(U)$. Då har X ffkn $F(t)$.

Bevis $\mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \le t) = \mathbb{P}(U \le F(t)) = F(t)$ ∎
ty $U \sim U[0,1]$

Tal låt $U \sim U[0,1]$. Hitta lämplig funk. g s.a. om $g(U) = X$
$\Rightarrow X \sim Exp(\lambda)$.

Låt enl. satsen ovan skall vi ta $g = F^{-1}$ där F är ffkn för en $Exp(\lambda)$-fördelad s.v. Om $Y \sim Exp(\lambda)$

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(s)\,ds = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\,ds = 1 - e^{-\lambda t} \quad t > 0.$$

ln, ej $\log_{10}$

Om $y = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = 1 - y \Rightarrow -\lambda t = \log(1-y) \Rightarrow t = \dfrac{\log(1-y)}{-\lambda} = F^{-1}(y)$

Därmed får vi att $X = F^{-1}(U) = \dfrac{\log(1-U)}{\lambda}$ //

Normalfördelningen

Def en s.v. X är normal fördelad med parametrar $\mu \in \mathbb{R}$ & σ^2 $(\sigma > 0)$ $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$, $f_X(s) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \mathbb{R}$

Anm: Om $\mu = 0$ & $\sigma^2 = 1$ skriver vi $Z \sim N(0,1)$ & Z sägs vara en standardiserad normalfördelad s.v.

Man skriver ofta $\phi(t)$ för tfkn $f_Z(t)$ & $\Phi(t) = F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(s)\,ds =$

$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}\,ds.$

Om $X \sim N(0,3)$ då blir $P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(s-0)^2}{6}} ds$.

Svår/omöjlig att lösa för hand? Istället används tabell.
Tabell finns bara för $N(0,1)$.

28/3 Vecka 9 Sannolikhetsfördelningar

Bernoulli försök

En slumpexperiment som antingen lyckas med sanno. p eller misslyckas med sanno. $1-p$.

Täthetsfunktion

Om $f(x) \geq 0 \ \forall x$ & $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, så är f en täthetsfunk. som beskriver en sannolikhetsfördelning.

Det gäller att $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ om X har fördelning som beskrivs av f.

Fördelningsfunktion

Ett annat sätt att beskriva en sannoliknets fördelning.

Om $F(x)$ är en fördelningsfunk. gäller

- $F(x)$ är monotont ökande (ej strikt)
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $P(X \leq a) = F_X(a)$
- $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

Väntevärde

Kan förstås som genomsnittet av oändligt många utfall

diskreta stokastiska variabler $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\,p(x)$

kontinuerliga —"— $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

Varians

Mäter hur mkt en s.v. varierar kring sitt väntevärde.

Standardavvikelsen ger väntevärdet för avståndet till X från $E(X)$

$Var(X) = E\left((X - E(x))^2\right) = E(x^2) - E(x)^2$

2.11 $X \sim Bin(n,p)$, dvs X är binomialfördelad med n försök & sanno. p för lyckat försök. Ange typvärde (mode) för X, dvs. ange k som maximerar $P(X=k)$. Tips: använd kvoten för på varandra följande k

L för $k <$ typvärde är sanno ökande t k, alltså där $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} > 1$ för dessa k

=> typvärdet är det minsta k s.a. $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \leq 1$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(n-k)!\,k!}{(n-k-1)!(k+1)!} p(1-p)^{-1} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-k-1)!\,k!}{(n-k-1)!(k+1)k!} \frac{p}{1-p} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p} \leq 1 \iff np - kp \leq k - kp + 1 - p$$

$\iff k \geq np - 1 + p = p(n+1) - 1$ ← runda upp ← runda ned

=> typvärdet är $\lceil p(n+1)-1 \rceil = \lfloor p(n+1) \rfloor$

2.21 X är geometriskt fördelad. Visa att $P(X > n+k-1 \mid X > n-1) = P(X > k)$. Förklara varför resultatet följer av konstruktion av den geometriska fördelningen från ober. Bernoulli-försök

L Geometrisk fördelning: X är antalet ober. Bernoulli-försök upp tom. det första lyckade försöket.

=> $P(X > k) = (1-p)^k$ = sanno. att k försök i rad misslyckas.

Kan visas med slf.

$P(X=m) = (1-p)^{m-1} p \Rightarrow P(X > k) = \sum_{m=k+1}^{\infty} (1-p)^{m-1} p = \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^{m+k} p =$

$= (1-p)^k P(X > 0) = (1-p)^k$

$$P(X>n+k-1 \mid X>n-1) = \frac{P(X>n+k-1 \cap X>n+1)}{P(X>n-1)} =$$

$$= \frac{P(X>n+k-1)}{P(X>n-1)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n-1}} = (1-p)^k = P(X>k)$$

Förklaring: försöken är ober. så vetskap om att n misslyckas n-1 ggr påverkar ej sanno. att de följande k försöken misslyckas.

2.34 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\alpha x}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$, $-1 \le \alpha \le 1$

a) Visa att $f(x)$ är en tdthetsfunktion,

ℒ dvs. visa att $f(x) \ge 0$ $\forall x$ & $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

$f(x) \ge 0 \iff \alpha x \ge -1 \iff \min \alpha x \ge -1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+\alpha x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 1$$

b) Ange fördelningsfunktionen.

ℒ $-1 \le x \le 1$: $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1+\alpha y}{2}\,dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{\alpha y^2}{4}\right]_{-1}^{x} = \frac{x}{2} + \frac{\alpha x^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha}{4}$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ (\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha)/4, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Ange medianvärdet

ℒ x medianvärde $\iff F(x) = 1/2 = \frac{\alpha x^2 + 2x + 2 - \alpha}{4}$

$\alpha = 0 \Rightarrow x = 0$

$\alpha \ne 0 \Rightarrow 0 = x^2 + \frac{2x}{\alpha} - 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$

$-1 \le x \le 1$, $\left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$ om $\alpha > 0$, $x = \frac{-1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1}$ om $\alpha < 0$.

d) Ange kvartilerna

ℒ som i c) men $F(x) = 1/4$ resp. $F(x) = 3/4$

4.2 X har fördelningsfunk. $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x \geq 1$

a) Ange $E(X)$ för de α för vilka $E(X)$ existerar

2 $f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx}(1 - x^{-\alpha}) = \alpha x^{-\alpha-1}$

$$E(X) = \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \alpha x^{-\alpha-1}\,dx = \text{om } \alpha = 1: [\ln x]_1^\infty = \infty$$

$$\alpha \neq 1: \left[\frac{\alpha x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty & \alpha < 1 \\ \frac{-\alpha}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ om $\alpha > 1$

Existerar ej annars!

b) Ange $\mathrm{Var}(X)$ för de α för vilka $\mathrm{Var}(X)$ existerar

2 $\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.

$$E(X^2) = \int_1^\infty x^2 \alpha x^{-\alpha-1}\,dx = \int_1^\infty \alpha x^{-\alpha+1}\,dx =$$

om $\alpha < 2$: $E(X^2) = \infty$ som innan

om $\alpha > 2$: $\left[\frac{\alpha x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^\infty = -\frac{\alpha}{2-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$

$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \ldots = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ om $\alpha > 2$, annars ej def.

4.26 En stav m längd L bryts i 2 delar. Ange väntevärdet för kvoten mellan den längre & den kortare delen. Slumpmässig placering av brottet.

2 Antag att alla platser för brottet är lika sannolika.

Låt X vara längden för den längre delen $\Rightarrow X = U[1/2, 1]$.

Låt $Z = \frac{X}{1-X}$ vara kvoten vi är intresserade av.

Vi behöver veta fördelningen för Z, den ges t.ex. av fördelningsfunk. för Z, $F_Z(z)$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{1-X} \leq z\right) = P\left(X \leq \frac{z}{1+z}\right) = F_X\left(\frac{z}{1+z}\right)$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_X\left(\frac{z}{1+z}\right) = f_X\left(\frac{z}{1+z}\right) \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z}\right) = f_X\left(\frac{z}{1+z}\right) \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{2}{(1+z)^2}$$

ty $f_X(x) = 2$ för $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow E(Z)=\int_1^\infty \frac{2z}{(1+z)^2}\,dz \overset{I.B.P.}{=} \left[\int (1+z)^{-2}dz=\left[-1(1+z)^{-1}\right]=\frac{-1}{1+z}\right]$$

$$=2\left[z\left(-\frac{1}{1+z}\right)-\int -\frac{dz}{1+z}\right]_1^\infty = 2\left[-\frac{z}{1+z}+\ln(1+z)\right]_1^\infty = \infty$$

($z\to-1$; $\to\infty$; $\to -1/2$; $\to \ln 2$)

$\Rightarrow$ Väntevärdet existerar ej!

20180409 Kom ihåg

1) X är en S.V. & $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kan nu def $Y=g(X)$

2) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ om $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$Z\sim N(0,1)$

Sats

Om $X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ [antar alltid $\sigma>0$ enl. def]

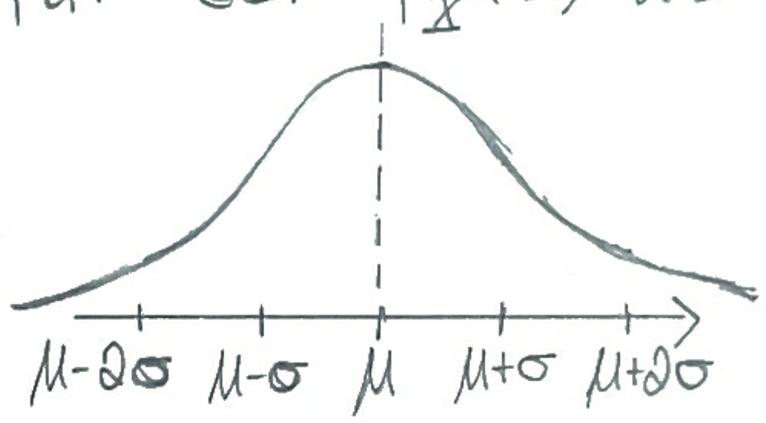
Bevis

$$F_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le t\right)=\mathbb{P}(X\le\mu+\sigma t)=\int_{-\infty}^{\mu+\sigma t}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=$$

$$=\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}=s\iff x=\mu+\sigma s\quad\Rightarrow dx=\sigma ds\right\}=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}s^2}\sigma ds=$$

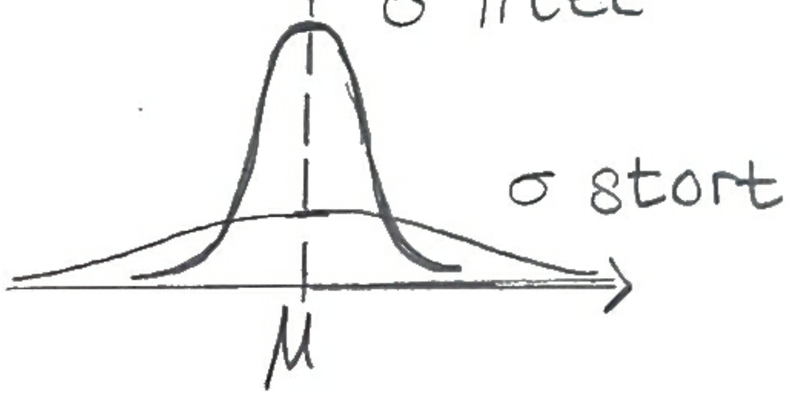
$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}s^2}ds,$$ h.l. är alltså fördelningsfunk, ffkn, för en $N(0,1)$-förd. s.v. ∎

Så här ungefär ser $f_X(t)$ ut om $X\sim N(\mu,\sigma^2)$



Ofta förekommande: $\mathbb{P}(|X-\mu|<1.96\sigma)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\le 1.96\right)\approx 0.95$

$\mathbb{P}(|X-\mu|\le 2.58\sigma)=\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\le 2.58\right)\approx 0.99$



Om μ ändras, translateras tfkn enbart!
(grafen flyttas längs "μ-axeln")

Tal

Låt $X\sim N(1.3, 0.36)$. Vad är $\mathbb{P}(\{0.9\le X\le 1\}\cup\{X\ge 1.2\})$?

$\mathbb{P}(\{0.9\le X\le 1\}\cup\{X\ge 1.2\})$ (disjunkta!) $=\mathbb{P}\left(\frac{0.9-1.3}{\sqrt{0.36}}\le\frac{X-1.3}{\sqrt{0.36}}\le\frac{1-1.3}{\sqrt{0.36}}\right)+$

$$+P\left(\frac{X-1.3}{\sqrt{0.36}} \geq \frac{1.2-1.3}{\sqrt{0.36}}\right) = P\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq -\frac{1}{2}\right) + P\left(Z \geq -\frac{1}{6}\right)$$

där Z är $N(0,1)$.

Tabell s. A7 i boken ger: $P(Z \geq -1/6) \overset{\text{symmetri}}{=} P(Z \leq 1/6) \approx 0.566$

$P(-2/3 \leq Z \leq -1/2) = P(1/2 \leq Z \leq 2/3) = P(Z \leq 2/3) - P(Z \leq 1/2) \approx 0.747 - 0.692$

$\Rightarrow P(\{0.9 \leq X \leq 1\} \cup \{X \geq 1.2\}) = 0.747 - 0.692 + 0.566 \approx 0.62$ //

Hypergeometrisk fördelning

Vi har en population med N individer. Låt p vara proportionen med en viss egenskap (t.ex. p= hirussmittade, p= andelen med en viss cancertyp, etc.).
Välj ut n individer slumpmässigt & låt X=# med egenskapen
Vilken sannolikhetsfunktion (slf) har X? Vi får

$$P(X=k) = \frac{(\#\text{ sätt att välja } k \text{ ur } N\cdot p) \times (\#\text{ sätt att välja } n-k \text{ ur } N(1-p))}{\#\text{ sätt välja } n \text{ ur } N}$$



i) # sätt välja k ur $Np = \binom{Np}{k}$

ii) -//- $n-k$ ur $N(1-p) = \binom{N(1-p)}{n-k}$

iii) -//- n ur $N = \binom{N}{n}$

$$\Rightarrow P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ med begränsningar...

Def X är hypergeometriskt fördelad med parametrar N, n, p ($X \sim Hg(N,n,p)$) om

$$P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ där $k \leq n$, $k \leq Np$, $k \leq 0$

$k \geq n - N(1-p)$, $n \leq N$

dessutom är Np ett heltal.

Anm i) detta skrivs ibland $X \sim Hg(N,n,m)$ där $m = Np$

ii) om Np, där stort & n litet, så blir valen approx. ober.: & N(1-p)

Säg att $N = 2 \cdot 10^7$ & $p = \frac{1}{2}$. Om vi valt en person som hade egenskapen är det nu $\frac{Np-1}{N-1} = \frac{10^7 - 1}{2 \cdot 10^7 - 1} \approx \frac{1}{2}$ som är proportionen med egenskapen.
↑ den nya

Dvs. om Np & $N(1-p)$ är stora & n är litet så blir $X \approx Bin(n,p)$.

Ex en medicinsk studie syftar till att se om aspirin hjälper förebyggande mot hjärtattack.
Man gav 11034 st. placebo & 11037 aspirin. Studien bestod av $N = 11034 + 11037 = 22071$ individer med proportionen $p = \frac{11034}{22071}$ som fick placebo.
Vi antar att aspirin ej påverkar / hjälper (H_0). ← noll-hypotes
Efter 10 år hade $n = 293$ fått hjärtattack, varav 189 kom från placebogruppen. Vilken slutsats kan vi dra om H_0?

Låt X vara # från placebogruppen med hjärtattack.
Under H_0 $X \sim Hg(22071, 293, 11034/22071)$

Beror på alla andra sanno. kan ej avgöra...

Vi har $P(X = 189) = \ldots = 0.000\,000\,15$. Är H_0 rimligt?

Tal Kalle spelar bridge (13 kort). Vad är sanno. att han får en hand med högst en hjärter?

Låt X = # hjärter. Vilken fördelning har X?
N = # kort = 52, n = # kort, Kalle får 13 kort.

$p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ = prop. hjärter.

Vi har att $X \sim Hg(52, 13, 1/4)$. Efter frågas $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \frac{\binom{Np}{0}\binom{N(1-p)}{13}}{\binom{N}{13}} + \frac{\binom{Np}{1}\binom{N(1-p)}{12}}{\binom{N}{13}} = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} + \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{12}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

20180410 Tal Kalle spelar bridge. Vad är sanno. att han får exakt 1 hjärter & 3 spader?

Låt X_h = # hjärter & X_s = # spader.

Vi kan beräkna $\mathbb{P}(X_h=1)$ & $\mathbb{P}(X_s=3)$, men vad blir $\mathbb{P}(X_h=1, X_s=3)$?
Intuitionen säger att X_h, X_s ej är ober. Så
$\mathbb{P}(X_h=1, X_s=3) \neq \mathbb{P}(X_h=1)\mathbb{P}(X_s=3)$

Vi använder divisionsregeln:
händer med 1 hjärter, 3 spader & 9 ruter/klöver, är $\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}$. Vi får då att

$$\mathbb{P}(X_h=1, X_s=3) = \frac{\binom{13}{1}\binom{13}{3}\binom{26}{9}}{\binom{52}{13}} \quad //$$

Flerdimensionella fördelningar

En flerdim. s.v. $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ & skrivs ofta $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Diskreta fallet

Fördelningen för en diskret (flerdim.) s.v. def. av dess
slf: $p_X(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}(X_1=x_1, \ldots X_n=x_n) \quad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

eller dess ffkn $F_X(x_1,\ldots,x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) =$
$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$= \sum_{y_1 \leq x_1} \sum_{y_2 \leq x_2} \ldots \sum_{y_n \leq x_n} \mathbb{P}(X_1=y_1, \ldots, X_n=y_n)$$

Def för en s.v. $X=(X_1,\ldots,X_n)$ kallas s.v. X_1, s.v. X_2 etc. för marginalerna till X. Deras fördelningar kallas för marginalfördelningar.

Def $(X_1,\ldots,X_n)$ är ober. omm $\forall (x_1,\ldots,x_n)$

$$F_X(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

Anm 1) kunde skrivit $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ & marginalerna till $\underline{X}$ är ober. (men ej nödvändigt)

2) ingen av dessa två ovanstående def. kräver att $\underline{X}$ är diskret.

3) om $\underline{X}$ är diskret har vi att $P(X_1=x_1)=\sum_{x_2}\dots\sum_{x_n}P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$ ger marginal-slf för X_1.

4) antag $\underline{X}=(X_1,X_2)$ & $X_1,X_2\in\mathbb{Z}$ samt är ober.

Vi har att $P(X_1\le k, X_2=l)=P(X_1\le k, X_2\le l)-P(X_1\le k, X_2\le l-1)$

$=P(X_1\le k)P(X_2\le l)-P(X_1\le k)P(X_2\le l-1)=P(X_1\le k)P(X_2=l)$

& $P(X_1=k, X_2=l)=P(X_1\le k, X_2=l)-P(X_1\le k-1, X_2=l)$

$=\dots=P(X_1=k)P(X_2=l)$.

I allmänhet gäller att $(X_1,\dots,X_n)$ ober. $\iff$

$P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\prod_{k=1}^{n}P(X_k=x_k)\quad\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Betingade diskreta fördelningar

Def låt $(\underline{X},\underline{Y})$ vara två diskreta s.v. Den betingade slf för $\underline{X}$ givet $\underline{Y}=y$ betecknas $p_{\underline{X}|\underline{Y}}(x|y)$ & denna ges av

$p_{\underline{X}|\underline{Y}}(x|y)=\dfrac{p_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y)}{p_{\underline{Y}}(y)}\left(=\dfrac{P(\underline{X}=x,\underline{Y}=y)}{P(\underline{Y}=y)}\right)$ om $p_{\underline{Y}}(y)>0$

om ist $p_{\underline{Y}}(y)=0$ låter vi $p_{\underline{X}|\underline{Y}}(x|y)=0$

Tal i) kasta tärning & låt $\underline{X}$ = resultatet

ii) singla slant $\underline{X}$ ggr & låt $\underline{Y}=\#H$.

Ta fram den gemensamma slf för $(\underline{X},\underline{Y})$.

$\underline{X}$ marginalfördelningen för $\underline{X}$ är $U(\{1,2,3,4,5,6\})$, dvs.

$P(\underline{X}=n)=\frac{1}{6}$, $n=1,\dots,6$.

Dessutom är $p_{\underline{Y}|X}(k|n) = P(\underline{Y}=k \mid X=n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

$= \binom{n}{k} 2^{-n}$

Vi får då att $p_{X,\underline{Y}}(n,k) = P(X=n, \underline{Y}=k) = P(\underline{Y}=k \mid X=n) P(X=n) =$

$= \frac{1}{6}\binom{n}{k}2^{-n}$ för $1 \le k \le n$ & $n = 1, \dots, 6$.

Kom ihåg

Om $X \sim Bin(n,p)$ så räknar X = # lyckade försök (utav n ober.). Ofta har vi fler kategorier (bra/godkänt/dåligt) (röd/grön/gul/vit).

Antag att vi gör n ober. försök med r möjliga utfall.

Låt X_i = # försök med utfall i där $i = 1, \dots, r$, & låt p_i vara sanno. att ett visst försök har utfall i.

Antag även att dessa är samma i alla försök.

Vad är den gemensamma slf för $(X_1, \dots, X_r)$?

Dvs. vad är $P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r)$

Exp. nr.	1	2	3	4	5	...	n-2	n-1	n
Utfall	7	r-1	1	1	3	...	6	r	r
Sanno.	p_7	p_{r-1}	p_1	p_1	p_3	...	p_6	p_r	p_r

En fix sekvens med k_i utfall av sort i har sanno $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

Hur många sådana sekvenser finns det?

1) vi väljer k_1 platser för utfall av typ 1 ur de n möjliga. Detta kan göras på $\binom{n}{k_1}$ sätt.
2) det återstår nu $n-k_1$ platser & vi ska välja k_2 av dessa. Detta kan göras på $\binom{n-k_1}{k_2}$ sätt.
3) -"- $n-k_1-k_2$ -"- välja k_3 -"- $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ sätt.

Vi får att # sekvenser blir

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}}\cdots 1$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \leftarrow \text{multinomialkoefficient}$$

Def $X = (X_1, \ldots, X_r)$ är multinomialfördelad m. parametrar $n \in \mathbb{N}^+$ & $p_1, \ldots, p_r$ s.a. $p_i \geq 0$ $\forall i = 1, \ldots, r$ & $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ om slf ges av $p_X(k_1, \ldots, k_r) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ $\forall (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^+$ s.a. $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Vi skriver $X \sim Mn(n; p_1, \ldots, p_r)$.

Tal Yatzy Kasta 5 tärningar & låt X_i = # tärningar med resultat i. Vad är $P(X_1 = 2, X_3 = 3)$?

$X = (X_1, \ldots, X_6) \sim Mn(5; 1/6, 1/6, \ldots, 1/6)$. Vi får att

$$P(X_1 = 2, X_3 = 3) = \binom{5}{2, 0, 3, 0, 0, 0}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdots = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^5 //$$

Om $X = (X_1, \ldots, X_r) \sim Mn(n; p_1, \ldots, p_r)$, vilken marginalfördelning har X_1?

Vi ser utfall nr. 1 som lyckat & resterande utfall som misslyckade, Vi ser då att $X_1 \sim Bin(n, p_1)$.

Vad med $X_1 + X_2$? Vi får $X_1 + X_2 \sim Bin(n, p_1 + p_2)$

2018 04 11 Kom ihåg

1) $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$ är en flerdim. s.v. Vidare kallas $\mathbb{X}_1$, s.v. $\mathbb{X}_2$ osv. dess marginaler

2) $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ är ober. omm $\mathbb{P}(\mathbb{X}_1 = x_1, \dots, \mathbb{X}_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{X}_k = x_k) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

3) $\mathbb{X} \sim \text{Poi}(\lambda)$ om $\mathbb{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, \dots$

Poisson-processer

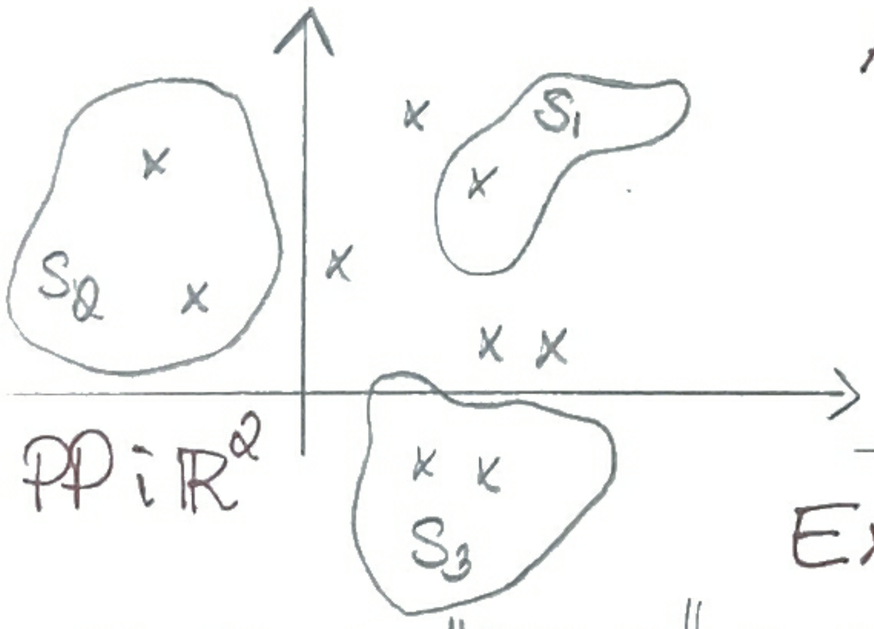
En Poission-process beskriver fördelningen av slumpmässiga händelser i en mängd $S \subset \mathbb{R}^d$ (mer generella finns).

För en Poission-process (PP) gäller att om $S_1, S_2, \dots, S_n \subset S$ är disjunkta, begränsade & N_k = # händelser i S_k så är

i) $N_1, N_2, \dots, N_n$ ober s.v.

ii) $N_k \sim \text{Poi}(\lambda |S_k|)$ där $\lambda > 0$ är en parameter (intensitet) & $|S_k|$ är storleken på S_k (dvs. volymen, arean, längden etc. beroende på om $d = 1, 2, 3, \dots$)

Anm: används inom astronomi/biologi/geologi/fysik/bildbehandling/telekommunikation etc.

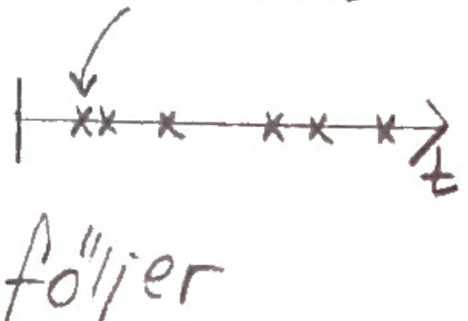


Ex 1) stjärnornas placering i ett begr. område.

2) var trädden växer i en skog

3) placering av radiosändare i en stad vid fix tidpkt

4) vid uppmätning av sönderfall i ett radioaktivt prov



Tal det bor björnar i en skog. Vid varje fix tidpkt följer placeringen av dessa approx. en PP med $\lambda = 0.3$ björnar/(km)^2. Vad är sanno. att det befinner sig en björn inom 2km från Jakob?

Låt S = disk m radie 2 km. centrerad runt Jakob
& N = # björnar i område S. Vi vet att $N \sim Poi(\lambda|S|)$
där $|S| = \pi r^2 = 4\pi$ (km)^2.
Efterfrågas $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N=0) = 1 - \frac{(\lambda|S|)^0}{0!} e^{-\lambda|S|} = 1 - e^{-\frac{4\pi}{10}}$

Flerdim. s.v. kont. fallet

En kont. s.v. $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ def av dess gemensamma tfkn
$f(s_1, \dots, s_n) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ & uppfyller att $\mathbb{P}(a_1 < X < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n)$
$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(s_1, \dots, s_n) ds_n \cdots ds_1 \quad \forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$.
$\underline{X}$ kan också def. av dess fkn $F(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1$
$\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

Def $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ är likf. fördelad på $A \subset \mathbb{R}^n$ s.a. $0 < |A| < \infty$ om

$$f(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} |A|^{-1} & \text{om } (s_1, \dots, s_n) \in A \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om $n=2$ & $A = [a,b] \times [c,d]$ får vi att $f(s_1, s_2) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \quad \forall (s_1, s_2) \in A$

Återigen kallas s.v. $X_1, \dots,$ s.v. X_n för marginalerna till
$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Vi har att $f_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(t, s_2, \dots, s_n) ds_n \dots ds_2$
är marginal-tfkn för X_1.
Vidare är $F_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1 =$
$= \lim_{s_2 \to \infty} \cdots \lim_{s_n \to \infty} F_{\underline{X}}(t, s_2, \dots, s_n)$

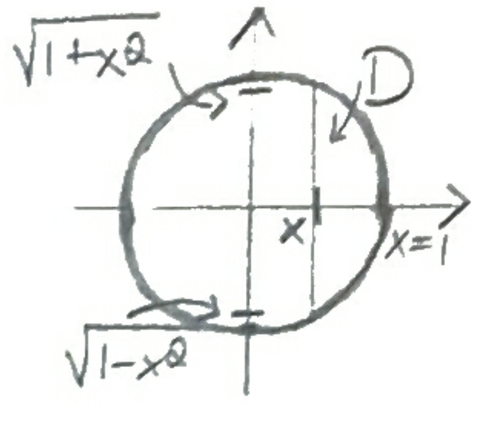
Def (som innan) $X_1, \dots, X_n$ är ober. omm.
$F_{\underline{X}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(t_k) \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

Anm: man kan visa att $X_1, \dots, X_n$ ober. är ekviv. med att $f_{\underline{X}}(s_1, \dots, s_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(s_k)$

Tal Låt (X, Y) vara likf. fördelade på $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) hitta marginalfördelningarna för X resp. Y

b) är X, Y ober?



L Vi har att $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{|D|} = \frac{1}{\pi}$ $(x,y) \in D$

Vi får då att $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \{-1 \leq x \leq 1\}$

$= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ för $-1 \leq x \leq 1$.

P.S.S. $f_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$ för $-1 \leq y \leq 1$. Rimligt? Svar: Ja!

b) Intuitivt nej! Om Y är nära 1 $\Rightarrow$ X nära 0.

Formellt: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = f_X(x) f_Y(y)$ om $(x,y) \in O$.

Def (X, Y) är biranat normalfördelad med parametrar $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ & ρ^2 om

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right)$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Sats Marginalfördelningarna är $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ & $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

Bevis Vi har att

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \left\{\begin{matrix} u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \\ v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2 + v^2 - 2\rho uv\right]\right) dv$$

$$= \{u^2 + v^2 - 2\rho uv = (v-\rho u)^2 + u^2(1-\rho^2)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{u^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dv}_{\text{tfkn för } N(\rho u, 1-\rho^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

... var först

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \\ v = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2+v^2-2\rho uv\right]\right) dv$$

$$= \left\{ u^2+v^2-2\rho uv = (v-\rho u)^2 + u^2(1-\rho^2) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right)}_{\text{tfkn för } N(\rho u,\, 1-\rho^2)} dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-u^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right.$$

11/4

3 11) Låt U_1, U_2 och U_3 vara ober $U[0,1]$. Vad är sann att $U_1x^2+U_2x+U_3=0$ har reella rötter?

L: Ekvationen $U_1x^2+U_2x+U_3=0$ har rötterna

$$x = -\frac{U_2}{2U_1} \pm \sqrt{\frac{U_2^2}{4U_1^2} - \frac{U_3}{U_1}}$$

Dessa är reella

omm $\frac{U_2^2}{4U_1^2} \geq \frac{U_3}{U_1} \iff U_2^2 \geq 4U_3U_1$

$\iff U_2 \geq 2\sqrt{U_1U_3}$

Efterfrågas $\mathbb{P}(U_2 \geq 2\sqrt{U_1U_3})$

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ $\quad P(X \in A) = \int_A \int f_{\vec{X}}(s_1, \dots, s_n)\, ds_n \dots ds_1$

$P(U_2 \geq 2\sqrt{U_1 U_3}) = \iiint_{x^2 \geq 2\sqrt{x_1 x_3}} f_{U_1,U_2,U_3}(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 dx_2 dx_1 =$

$= \left\{ f_{U_1,U_2,U_3}(x_1,x_2,x_3) = f_{U_1}(x_1) f_{U_2}(x_2) f_{U_3}(x_3) = 1 \text{ om } (x_1,x_2,x_3) \in [0,1]^3 \right.$
$\left. \text{dvs om } 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall\, i = 1,2,3 \right\} =$

20)

$I_A(x)$; $I(x \in A)$; $\chi_A(x)$; $\chi(x \in A)$

$I(x \in A) = \begin{cases} 1 \text{ om } x \in A \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$

$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 I(x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_3})\, dx_2 dx_1 dx_3 =$

$= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\min(1, 2\sqrt{x_1 x_3})}^1 1\, dx_2 dx_1 dx_3 = \int_0^1 \int_0^1 1 - \min(1, 2\sqrt{x_1 x_3})\, dx_1 dx_3 =$

$= \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{x_1 x_3} \leq 1 \Rightarrow x_1 x_3 \leq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x_1 \leq \frac{1}{4x_3} \end{array} \right\} = \int_0^1 \int_0^{\min(1, \frac{1}{4x_3})} 1 - 2\sqrt{x_1 x_3}\, dx_1 dx_3 =$

$= \int_0^1 \left[x_1 - 2\sqrt{x_3} \cdot \frac{x_1^{3/2}}{3/2} \right]_0^{\min(1, \frac{1}{4x_3})} dx_3 =$

$$= \int_0^1 \min\left(1, \frac{1}{4x^2}\right) - \frac{4}{3}\sqrt{x_3}\left(\min\left(1, \frac{1}{4x_3}\right)\right)^{3/2} dx_3 =$$

$$= \int_0^{1/4} 1 - \frac{4}{3}\sqrt{x_3}\, dx_3 + \int_{1/4}^1 \underbrace{\frac{1}{4x^2} - \frac{4}{3}\sqrt{x_3}\,\frac{1}{8x_3^{3/2}}}_{=\frac{1}{12x_3}} dx_3 =$$

$$= \left[x_3 - \frac{4}{3}\frac{x_3^{3/2}}{3/2}\right]_0^{1/4} + \left[\frac{1}{12}\log(x_3)\right]_{1/4}^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{12}\log\frac{1}{4} = \frac{5}{36} + \frac{\log(2)}{6}$$

323) Låt $N \sim \text{Bin}(m,r)$ och betingat på att $N=n$, låt $X \sim \text{Bin}(n,p)$ (kan skrivas lite skarvigt som $X|N \sim \text{Bin}(N,p)$). Vilken obetingad fördelning har X?

Lö Metod 1 tänka, Metod 2: räkna

Vi har att $\mathbb{P}(N=n) = \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n}$ $n=0,1,\dots,m$

och $\mathbb{P}(X=k|N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$

Vi söker $\mathbb{P}(X=k)$ $\forall$ k.

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(X=k, N=n) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(X=k|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n} =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{m!}{n!(m-n)!} r^n (1-r)^{m-n} =$$

$$= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{n=k}^{m} \frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!} p^k (1-p)^{n-k} r^n (1-r)^{m-n} =$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=k}^{m} \frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!} ((1-p)r)^{n-k} (1-r)^{m-n} =$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=0}^{m-k} \frac{(m-k)!}{n!(m-k-n)!} ((1-p)r)^n (1-r)^{m-n-k} =$$

(420)

$$= \binom{m}{k} (rp)^k \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} ((1-p)r)^n (1-r)^{m-k-n} =$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$$= \binom{m}{k} (rp)^k ((1-p)r + (1-r))^{m-k} = \binom{m}{k} (rp)^k (1-rp)^{m-k}$$

vilket är sf för $X \sim Bin(m, rp)$ $k = 0, 1, \ldots, m$

Tänka: Exp nr 1 2 3 4 ... m-1 m

N: r r x x ... r x

I: (r) r (r)

sann: rp 1-rp rp

I är de försök som lyckas i båda stegen

3.25] Låt X vara en kont s.v. och låt $Y = WX$ där $W \in \{-1, 1\}$ med sann $\frac{1}{2}$ vardera, W, X är oberoende. Visa att $f_Y(y)$ är symmetrisk kring $y=0$

Lösn: $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(WX \le y) =$

$= P(WX \le y \mid W=1) P(W=1) + P(WX \le y \mid W=-1) P(W=-1)$

$= \frac{1}{2} P(X \le y) + \frac{1}{2} P(X \ge -y) =$

$= \frac{1}{2} F_X(y) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-y))$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2}(F_X'(y) - F_X'(-y)) = \frac{1}{2}(f_X(y) + f_X(-y))$

vi ser att

$f_Y(-y) = \frac{1}{2}(f_X(-y) + f_X(y)) = f_Y(y)$ ∎

Kom ihåg! Flerdimensionella kont. fördelningar (gemensa

Tal: (X, Y) likf. ford på $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$ 17/4

a) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}$ $(x,y) \in D$

$f_X(x) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ $-1 \le x \le 1$

$f_Y(y) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ $-1 \le y \le 1$

b) X, Y är oberoende

2018 04 17 Kom ihåg

Flerdim. kont. fördelningar (gemensamma)

Tal $(\underline{X}, \underline{Y})$ likf. förd. på $D = \{x^2+y^2 \le 1\}$

a) $f_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y) = \frac{1}{\pi}$ $(x,y) \in D$

$f_{\underline{X}}(x) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$ $-1 \le x \le 1$

$f_{\underline{Y}}(y) = \ldots = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ $-1 \le y \le 1$

b) $\underline{X}, \underline{Y}$ ej ober. //

Betingade fördelningar

Def Vi def den betingade (fördelningen) tfkn för $\underline{X}$ givet $\underline{Y}=y$ genom $f_{\underline{X}|\underline{Y}}(x|y) = \frac{f_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y)}{f_{\underline{Y}}(y)}$ om $f_{\underline{Y}}(y) > 0$,

& låter $f_{\underline{X}|\underline{Y}}(x|y) = 0$ om $f_{\underline{Y}}(y) = 0$.

Anm: detta smakar som om vi betingar på händelsen $\underline{Y}=y$ som har sanno. 0. Det är i själva verket inte vad vi gör då betingad sanno. ej är en del av vår def. Man säger dock att vi har den betingade tfkn givet $\underline{Y}=y$.

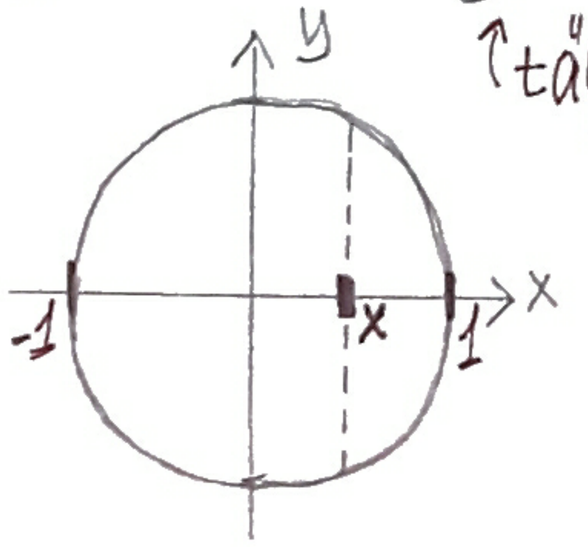
Tal Bestäm $f_{\underline{Y}|\underline{X}}(y|x)$ om $(\underline{X}, \underline{Y})$ är som i sista uppg. ons 11/4. Tolka fördelningen.

L Vi har att $f_{\underline{Y}|\underline{X}}(y|x) = \frac{f_{\underline{X},\underline{Y}}(x,y)}{f_{\underline{X}}(x)} = \frac{1/\pi}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$,

för $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

↑täljaren & $-1 < x < 1$

↑nämnaren



Vi ser att den bet. förd. för $\underline{Y}$ givet $\underline{X}=x$ är uniform, ty beror ej på y. på intervallet $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ //

Från vår ursprungliga def. av gemensam tfkn, följer (med mkt pill) att

$$\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{I((x,y)\in A)}_{\text{1 om } (x,y)\in A,\ 0 \text{ annars}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy.$$

indikatorfunk.

Tal med (X,Y) som förut, bestäm $\mathbb{P}(X+Y\le 1)$

Vi har att $\mathbb{P}(X+Y\le 1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I(x+y\le 1)\,f(x,y)\,dxdy$

$$=\iint_D I(x+y\le 1)\frac{1}{\pi}\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} I(x\le 1-y)\frac{1}{\pi}\,dxdy=\left\{\begin{array}{l} 1-y^2=(1-y)(1+y)\ge (1-y)^2 \\ \text{omm } 0\le y\le 1 \end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} 2\sqrt{1-y^2}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} 1-y+\sqrt{1-y^2}\,dy=\ldots=\frac{2+3\pi}{4\pi}$$

Vi kan nu utöka definitionerna av väntevärden:

1) $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$, om (X,Y) kont. s.v.

2) $\mathbb{E}[g(X,Y)]=\sum_{x_i}\sum_{y_j} g(x_i,y_j)\,\mathbb{P}(X=x_i,\,Y=y_j)$, om (X,Y) diskreta s.v.

Anm: $\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I((x,y)\in A)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\mathbb{E}[I((X,Y)\in A)]$

Sats Om X, Y ober. gäller att $\mathbb{E}[g(X)h(Y)]=\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$
$\forall\, g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Bevis 1) (X,Y) kont.

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\{\text{ober. } f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)h(y)f_Y(y)\,dydx=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)\,dy=$$

$$=\mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$$

2) övning ∎

Kovarians & Korrelation

Def kovariansen av s.v. X, Y def som

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$

korrelationskoeff. $\rho(X,Y)$ def. som

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

Anm: 1) ρ är dimensionslös (normerad)

2) Om X, Y är ober. gäller att $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

$\overset{\text{ober.}}{=} \mathbb{E}[X-\mathbb{E}[X]]\,\mathbb{E}[Y-\mathbb{E}[Y]] = 0.$

Dessutom blir $\rho(X,Y)=0$.

Naturlig fråga: om $Cov(X,Y)=0$ är då X, Y ober?

Svar: Nej!

Ex: låt $X \sim N(0,1)$ & låt $w \in \{-1,1\}$ med sanno. $1/2$ vardera.

låt också X, w vara ober & sätt $Y = wX$.

Vi har att $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] =$

$= \{\mathbb{E}[X]=0$ ok, $\mathbb{E}[Y]=0$ övn.$\} = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[wX^2] =$

$= \mathbb{E}[w]\,\mathbb{E}[X^2] = 0$ ty $\mathbb{E}[w] = 1\cdot 1/2 + (-1)\cdot 1/2 = 0$

Är X, Y ober?

Vi har att $|X| = |Y|$ s.a. $\mathbb{P}(|X|\geq 1, |Y|\leq 1) = 0 \neq \mathbb{P}(|X|\geq 1)\,\mathbb{P}(|Y|\leq 1)$

Sats För d s.v. X, Y gäller

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

Bevis

$$Var(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2 +$$

$$+ 2(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) \quad \blacksquare$$

Anm: Om X, Y ober. $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

OBS! $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ kräver ej ober!

Sats i) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

ii) $\forall a \in \mathbb{R} \quad Cov(aX, Y) = a\,Cov(X,Y)$

iii) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

iv) $Cov(X,X) = Var(X)$

v) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

2018 04 18 Kom ihåg

$$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

$$\rho(X,Y) \overset{\&}{=} \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

Sats $-1 \le \rho \le 1$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$\Rightarrow Var(X-Y) = Var(X) + Var(-Y) + 2Cov(X,-Y) = Var(X) + (-1)^2 Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

OBS! Om X, Y är ober. $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$ ty $Cov(X,Y)=0$

Bevis Låt $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$.

Vi har $0 \le Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) + Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right) - 2Cov\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} Var(X) + \frac{1}{\sigma_Y^2} Var(Y) - 2\,\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 1 + 1 - 2\rho = 2(1-\rho)$$

$\Rightarrow \rho \le 1$

p.s.s. $0 \le Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \ldots = 2(1+\rho) \Rightarrow \rho \ge -1$ ∎

Betingade Väntevärden

Def det betingade väntevärdet av X givet $Y=y$ ges av

om (X,Y) är kont. s.v.

1) $E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx$

$$E[g(X) \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

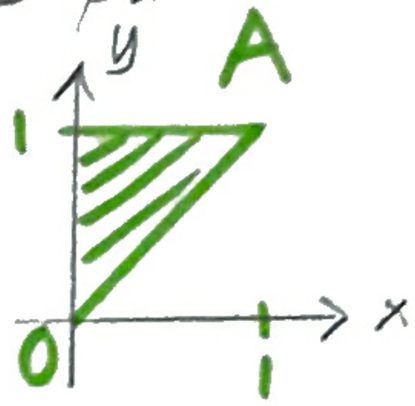
om (X,Y) är diskreta s.v.

2) $E[X \mid Y=y_j] = \sum_{x_i} x_i\, p_{X|Y}(x_i|y_j)$

$$E[g(X) \mid Y=y_j] = \sum_{x_i} g(x_i)\, p_{X|Y}(x_i|y_j)$$

Anm: Om (X,Y) diskreta så är $E[X \mid Y=y] = 0$ om $P(Y=y)=0$

Tal låt (X, Y) vara likf. fördelade på $A = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$.



Beräkna $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ $\forall\, y \in [0,1]$

Då $|A| = \text{area}(A) = 1/2$, så är

$$f_{X,Y}(x,y) = 2 \quad \forall (x,y) \in A$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y \qquad 0 \le y \le 1$$

Därför blir $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2}{2y} = \dfrac{1}{y}$ $\quad 0 \le y \le 1$ & $0 \le x \le y$

Vi får att

$$\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^y \frac{x}{y}\,dx = \frac{y}{2} \quad \text{om } 0 \le y \le 1$$

(& $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = 0$ annars) //

Observera att $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är den funk. av s.v. Y som antar värdet $\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ om $Y = y$. Då $\mathbb{E}[X \mid Y]$ är en funk. av Y är även $\mathbb{E}[X \mid Y]$ en s.v.

Sats Vi har att $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$.

Bevis (kont. fallet)

Vi har att $\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\,dy$, så

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid Y = y] f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx\, f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X] \qquad \blacksquare$$

Anm: 1) Satsen kallas ibland för LTE = Low of Total Expectation

2) Vårt tal ger $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y = y]] = \int_0^1 y/2 \cdot 2y\,dy = 1/3$ //

3) I detta fall är $\mathbb{E}[X \mid Y] = \dfrac{Y}{2}$

Olikheter

Sats "För alla s.v. X & $a>0$, gäller att

$$\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}$$ ← Markov's olikhet

Bevis Låt X vara kont. $\mathbb{E}[|X|]\geq \mathbb{E}[I(|X|\geq a)|X|]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,I(|x|\geq a)f_X(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} a\,I(|x|\geq a)f_X(x)\,dx = a\int_a^{\infty} f_X(x)\,dx + a\int_{-\infty}^{-a} f_X(x)\,dx =$$

$$= a\,\mathbb{P}(X\geq a) + a\,\mathbb{P}(X\leq -a) = a\,\mathbb{P}(|X|\geq a)$$

Diskreta fallet p.s.s. ∎

Sats Låt X vara en s.v. med $Var(X)<\infty$. Vi har att $\forall a>0$,

Chebyshev's olikhet → $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)\leq \frac{Var(X)}{a^2}$

Bevis Vi har att $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq a)=\mathbb{P}((X-\mathbb{E}[X])^2\geq a^2)\leq$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$ ∎

Tal Låt $X\sim Bin(n,1/4)$. Hitta övre begr. till $\mathbb{P}(X\geq n/2)$ mha

a) Markov's olikhet b) Chebyshev's olikhet

a) $\mathbb{P}(X\geq n/2)\leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}$

b) $\mathbb{P}(X\geq n/2) = \mathbb{P}(X-n/4\geq n/4)\leq \mathbb{P}(|X-\frac{n}{4}|\geq \frac{n}{4})\leq \frac{Var(X)}{(n/4)^2}$

$$= \frac{n\cdot 1/4\cdot 3/4}{n^2/16} = \frac{3}{n}$$ //

Anm: $\frac{3}{n} << \frac{1}{2}$ om n stort, men i själva verket kan vi göra mkt bättre

---

~~Svaga~~ Stora Talens Lag, STL, LLN

Def En sekvens av s.v. $X_1, X_2, \ldots$ som är <u>ober. & lika-fördelade</u> kallas för en i.i.d. (independent

and identically distributed) sekvens.

Tag en iid sekvens $X_1, X_2, \ldots$ med $\mu = \mathbb{E}[X_k]$ & $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) < \infty$. Bilda medelvärdet av de n första

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$ Vad tror ni om $\overline{X}_n$?

Sats (STL)

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en iid sekvens med $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$. För varje $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

Bevis

Observera att $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu = \mu.$

Vi får att $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}[\overline{X}_n]| \geq \varepsilon) \overset{\text{cheby.}}{\leq} \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} =$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \overset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

∎

20180418 Räkneövning 4

3.9 marginaltäthet & betingad täthet.

4.46 & 4.67 räkneregler för väntevärde, varians, kovarians & korrelation.

4.88 momentgenererande funktioner.

3.9 (X,Y) är uniformt fördelad över regionen

$0 \le y \le 1-x^2$, $-1 \le x \le 1$.

a) ange marginaltätheterna för X & Y.

Δ uniform förd $\Rightarrow f(x,y) = C$, $C = \frac{1}{V}$, V = regionens volym

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1} 1-x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{3}{4}$ om (x,y) är i regionen, 0 annars.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1-x^2} \frac{3}{4}\,dy = \frac{3}{4}(1-x^2) \quad \text{om } -1 \le x \le 1$$

$$y \le 1-x^2 \iff x^2 \le 1-y \iff -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}$$

$$f(y) = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} \quad \text{om } y \le 1-t^2$$

$f(y) \neq f(x)$

b) ange de betingade tätheterna för X & Y

Δ $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{3/4}{\frac{3}{2}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$ om (x,y) i regionen.

$f(y|x) = \frac{3/4}{\frac{3}{4}(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$ om (x,y) i regionen

4.46 U, V oberoende med väntevärde μ & varians σ^2

$Z = \alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}\,V$. Ange $\mathbb{E}(Z)$ & $\mathbb{V}(Z)$

$\mathcal{L}$ $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}V) = \alpha E(U) + \sqrt{1-\alpha^2}\,E(V) =$

$= \alpha\mu + \sqrt{1-\alpha^2}\,\mu = \mu(\alpha + \sqrt{1-\alpha^2})$

$\rho_{UZ} = \dfrac{Cov(U,Z)}{\sqrt{Var(U)Var(Z)}}$

$Var(Z) = Var(\alpha U) + Var(\sqrt{1-\alpha^2}V) = \alpha^2\sigma^2 + (1-\alpha^2)\sigma^2 = \sigma^2$

$Cov(U,Z) = Cov(U, \alpha U + \sqrt{1-\alpha^2}V) = Cov(U,\alpha U) - Cov(U, \sqrt{1-\alpha^2}V) =$

$= \alpha\, Cov(U,U) + \sqrt{1-\alpha^2})\, Cov(U,V) = \alpha\, Var(U) = \alpha\sigma^2$

$\rho_{UZ} = \dfrac{\alpha\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2\sigma^2}} = \alpha.$

4.67 En "stokastisk rektangel" kan konstrueras enligt följande: 1) låt $X \sim U[0,\square]$

2) givet X, $Y \sim U[0,X]$

X & Y är längden på rektangelns sidor.

Använd lagen om totalt väntevärde ($\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y)$) för att ange väntevärdet för rektangelns omkrets & yta.

$\mathcal{L}$ Omkrets: $\mathbb{E}(2X + 2Y) = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X/2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(2X + 2Y) = 1 + 1/2 = 3/2$

Yta: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X) = \mathbb{E}(X\,\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(X\frac{X}{2}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

alt. $\mathcal{L}$ $Var(Z) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2$

$= \frac{1}{2}(Var(X) + \mathbb{E}(Z)^2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$

4.88 Låt $Z \sim N(0,\sigma^2)$ & använd mgf för att ta fram momentan för X.

$\mathcal{L}$ mgf: $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$

$$M'(0) = \mathbb{E}(X)$$

$$M''(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

$$M^{(3)}(0) = \mathbb{E}(X^3) \text{ osv.}$$

tfkn: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{tx} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2t\sigma^2)} dx$$

$$\left[x^2 - 2t\sigma^2 = (x - t\sigma^2)^2 - t^2\sigma^4, \text{ låt } u = x - t\sigma^2 \right]$$

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\sigma^2 (u^2 - t^2\sigma^4)} du = \frac{e^{\frac{t^2\sigma^4}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = e^{\frac{t^2\sigma^4}{2}}$$

$$M'(t) = t\sigma^2 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = M'(0) = 0$$

$$M''(t) = \sigma^2 M(t) + t^2\sigma^4 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = M''(0) = \sigma^2$$

$$M^{(3)}(t) = 3t\sigma^4 M(t) + t^3\sigma^6 M(t) \Rightarrow \mathbb{E}(X^3) = 0$$

$$M^{(4)}(0) = \mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$$

2018 04 23 Kom ihåg

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Sats (STL)

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ i.i.d. med $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$.

Då gäller att $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$.

Anm. uppenbarligen innebär detta att $\overline{X}_n \to \mu$ i ngn mening.

Def Vi säger att sekvensen $X_1, X_2, \ldots$ konv. mot X i sannolikhet om $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

Vi skriver $X_n \xrightarrow{p} X$

Anm: STL: $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Ex Monte-Carlo simulering

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara iid & $X_k \sim U[0,1]$. Vi har $\mathbb{E}[e^{X_i^2}] = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

Låt $Y_k = e^{X_k^2}$. STL ger då att

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{X_k^2} \xrightarrow{p} \mathbb{E}[Y_1] = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Använd MATLAB för att generera $X_1, X_2, \ldots, X_{10000}$

$$\frac{1}{10000}\sum_{k=1}^{10000} e^{X_k^2} \approx \int_0^1 e^{x^2} dx$$

Momentgenererande funktioner

Def den momentgenererande funktionen, mgf, av en s.v. X betecknas $M_X(t)$ & def av

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}],$$

för de t s.a. väntevärdet är ändligt.

Anm 1) Vi får att $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx$, om X kont. s.v. medan för diskreta s.v. är $M_X(t) = \sum_{x_j} e^{x_j t} \mathbb{P}(X = x_j)$.

2) Antag att X är kont. Vi får att

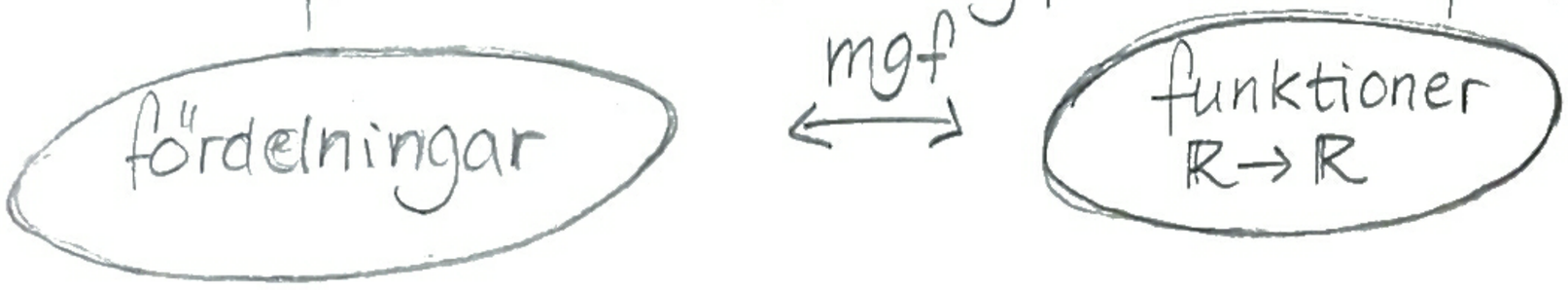
$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx \overset{(?!)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{xt} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{xt} f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow M_X'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X].$$

p.s.s. $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$ ← n:te momentet

Sats Om $M_X(t)$ existerar $\forall t$ i ett öppet intervall runt 0, så bestämmer detta slf/tfkn/fördelningen av X.

Anm: I själva verket är mgf en transform.



Satsen säger att transformen är inverterbar

Tal Hitta mgf för $X_1 \sim \text{Poi}(\lambda_1)$

Vi har att $M_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{X_1 t}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$

$= e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 e^t} = e^{\lambda_1(e^t - 1)}$ //

↑ Taylor

Sats Om $X_1, X_2, \ldots$ är ober. gäller att

$$M_{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t).$$

Bevis Vi har att

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X_1+\dots+X_n)}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}] \overset{\text{ober.}}{=}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_k}] = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t) \quad \blacksquare$$

Tal låt $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$ & $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$ vara ober. s.v.

Hitta fördelningen för $X_1 + X_2$

Metod 1: beräkna $P(X_1 + X_2 = k)$ $\forall k$.

Metod 2: hitta mgf $X_1 + X_2$:

$$M_{X_1+X_2}(t) \overset{\text{ober.}}{=} M_{X_1}(t) + M_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2) \quad //$$

Sats Om X har mgf $M_X(t)$ & $Y = a + bX$

$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{at} M_X(bt).$$

Bevis $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{Yt}] = \mathbb{E}[e^{(a+bX)t}] = \mathbb{E}[e^{at} e^{btX}] =$

$$= e^{at} \mathbb{E}[e^{X(bt)}] = e^{at} M_X(bt) \quad \blacksquare$$

Ex låt $X \sim N(0,1)$, $M_X(t) = \dots = e^{t^2/2}$.

Enl. tidigare $Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Vi får $M_Y(t) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ //

Def för två s.v. (X, Y) def vi deras gemensamma mgf som $M_{X,Y}(s,t) = \mathbb{E}[e^{sX+tY}]$.

Vi får att $M_X(s) = M_{X,Y}(s,0)$

Anm: man kan visa att

X, Y ober $\Leftrightarrow M_{X,Y}(s,t) = M_X(s)\, M_Y(t)$.

Mgf i olikheter

Vi har att om $X \geq 0$ & $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \underset{t>0}{=} \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-at} M_X(t)$$

Tal hitta mgf $X \sim \text{Bin}(n,p)$

L låt $X_k = \begin{cases} 1 & \text{om "försök" } k \text{ lyckas} \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$

dvs. låt $X_1, \dots, X_n$ vara iid $\text{Bern}(p)$, då har vi att

$X = X_1 + \dots + X_n$.

Vi har att $M_X(t) = M_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}(t) = [M_{X_1}(t)]^n$.

Vidare är $M_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{X_1 t}] = e^t p + e^0(1-p) = pe^t + 1 - p$.

Vi får då att $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$ //

Tal låt $X \sim \text{Bin}(n,p)$. Hitta en bra övre begränsning på $\mathbb{P}(X \geq np(1+\varepsilon))$.

L $\mathbb{P}(X \geq np(1+\varepsilon)) \leq e^{-np(1+\varepsilon)t} M_X(t) = e^{-np(1+\varepsilon)t}(pe^t + 1 - p)^n =$

$= e^{-np(1+\varepsilon)t}(1 + p(e^t - 1))^n \underset{1+x \leq e^x}{\leq} e^{-np(1+\varepsilon)t}(e^{p(e^t-1)})^n = e^{np(e^t - 1 - t(1+\varepsilon))}$

Vidare är $e^t = 1 + t + t^2/2 + \dots \underset{\text{om } t \leq \varepsilon}{\leq} 1 + (1 + \frac{2\varepsilon}{3})t$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq np(1+\varepsilon)) \leq e^{np(e^t - 1 - t(1+\varepsilon))} \leq e^{np(1 + (1+\frac{2\varepsilon}{3})t - 1 - t(1+\varepsilon))} =$

$= e^{-np\frac{\varepsilon t}{2}}$ om $t \leq \varepsilon$

dvs. $\mathbb{P}(X \geq np(1+\varepsilon)) \leq e^{-np\frac{\varepsilon^2}{3}}$

Anm: innan kade vi mha Cheb. & $p=\frac{1}{4}$ att

$$\mathbb{P}(X \geq n/2) \leq 3/n.$$

Nu har vi att $p=\frac{1}{4}$, $\varepsilon = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq n/2) \leq e^{-n\frac{1}{12}}$

Anm: $X \sim \text{Bin}(10^{20}, 1/2)$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| > 10^{-9}\right) \leq \ldots \leq 2e^{-\frac{n}{12}\varepsilon^2} = 2e^{-\frac{100}{12}}$$

2018 04 24 Kom ihåg

1) mgf $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{Xt}]$ för de t s.a. väntevärdet är ändligt

2) $(1+a_n)^{b_n} \to e^c$, $n \to \infty$ ifall $a_n \to 0$ & $a_n b_n \to c$ då $n \to \infty$

Centrala gränsvärdessatsen, CGS, CLT

Def Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en sekvens av s.v. med ffkn $F_1, F_2, \ldots$ & låt X vara en s.v. med ffkn F.
Vi säger att X_n konvergerar mot X i fördelning om

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

$\forall x$ där X är kontinuerlig.

Anm: 1) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \le x) = \mathbb{P}(X \le x)$

2) kom ihåg: $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ där $np_n \to \lambda$ då $n \to \infty$.
Vi såg då att $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ där $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.
Vi får då att $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \le x) = \sum_{k\le x} \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow$
$\longrightarrow \sum_{k\le x} \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x) = F(x)$.

dvs. $X_n \to X$ i fördelning.

3) Vi skriver ofta $X_n \xrightarrow{d} X$ d for distribution

---

Sats Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara s.v. där X_n har mgf M_n.
Låt sedan X vara en s.v. med mgf M. Vi har att

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t) \quad \forall t \text{ i ett öppet intervall kring } 0.$$

Bevis svårt. ▨

Anm: extremt användbart verktyg.

Tal använd mgf för att visa $X_n \xrightarrow{d} X$ då

$X_n \sim Bin(n, p_n)$, $X \sim Poi(\lambda)$ & $np_n \to \lambda$.

Kom ihåg: $X \sim Bin(n,p) \Rightarrow M_X(t) = (pe^t + 1-p)^n$

$X \sim Poi(\lambda)$, $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Bevis vi får $M_{X_n} = (p_n e^t + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^t-1))^n \to e^{\lambda(e^t-1)} = M_X(t)$

$(1+a_n)^{b_n} \to e^c$

Anm: detta konv. resultat kallas ibland för små talens lag.

Sats (CGS/CLT)

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en iid sekvens med $\mu = \mathbb{E}[X_1]$,

$\sigma^2 = Var(X_1) < \infty$.

Låt $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Vi har då att $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) \to \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dvs. $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$

Bevis

kom ihåg: $M_{a+Xb}(t) = e^{at} M_X(bt)$

$M_Z(t) = e^{t^2/2}$ om $Z \sim N(0,1)$

Låt $Y_n = X_n - \mu$, s.a. $\sum_{k=1}^{n} Y_k = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - n\mu = S_n - n\mu$.

Sätt $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ & $Z_n = \frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.

Vi får att $M_{Z_n}(t) = M_{\frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}}} = M_{T_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \overset{ober.}{=} \prod_{k=1}^{n} M_{Y_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left[M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$.

Vi kan Taylorutv. $M_{Y_1}(s)$.

$M_{Y_1}(s) = M_{Y_1}(0) + sM'_{Y_1}(0) + s^2 M''_{Y_1}(0) + \mathcal{O}(s^3)$.

Vi har

- $M_{Y_1}(0) = \mathbb{E}[e^{Y_1 \cdot 0}] = \mathbb{E}[1] = 1$

- $M'_{\underline{Y}_1}(0) = \mathbb{E}[\underline{Y}_1] = \mathbb{E}[X_1 - \mu] = 0$
- $M''_{\underline{Y}_1}(0) = \mathbb{E}[\underline{Y}_1^2] = \mathbb{E}[(X_1-\mu)^2] = \sigma^2$

För fixt s så fås att $M_{\underline{Y}_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \cdot 0 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n}\sigma^2 + \mathcal{O}(n^{-3/2})$

Därmed får vi att $= 1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}(n^{-3/2})$.

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[M_{\underline{Y}_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}(n^{-3/2})\right]^n = e^{t^2/2},$$

ty $n\left(\frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}(n^{-3/2})\right) = \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \to \frac{t^2}{2}$.

Då $e^{t^2/2}$ är mgf för $Z \sim N(0,1)$ är beviset klart. ∎

Hur använder vi CGS i praktiken?

För "stora" n är

1) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu) \approx Z$ där $Z \sim N(0,1)$

2) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \approx N\left(\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} X_k],\ \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right)$

3) $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \approx N\left(\mathbb{E}[\overline{X}_n],\ \mathrm{Var}(\overline{X}_n)\right)$

Kom ihåg: $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ där n stort & np litet (säg ≤ 10)
$\Rightarrow X \approx \mathrm{Poi}(\lambda)$ där $\lambda = np$.

Om ist n stort & np stort? Vi har att

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, där $X_1, \ldots, X_n$ är iid. $\mathrm{Be}(p)$.

CGS kan appliceras på denna summa. Vi får att

$X \approx N(\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X)) = N(np, np(1-p))$

Ex Spel med 3 val

a) du får 4500 SEK

b) singla slant, om

1) H får du 10 000 SEK
2) T får du 0 SEK

c) Singla 10 000 slantar, du får alla som visar H.
Vilket ska man välja? Vi analyserar **c)**.

Sätt $X = \#$ enkronor som vinns $\sim \text{Bin}(10000, 1/2)$.

CGS säger $X \approx N(\mathbb{E}[X], \text{Var}(X)) = N(5000, 2500)$.

Vad är $\mathbb{P}(X \leq 4500)$? dvs. **c)** sämre än **a)**

$$\mathbb{P}(X \leq 4500) = \mathbb{P}\left(\frac{X-5000}{\sqrt{2500}} \leq \frac{4500-5000}{\sqrt{2500}}\right) \approx \mathbb{P}(Z_1 \leq -10) = \Phi(-10) \leq 10^{-10}$$

där $Z_1 \sim N(0,1)$.

2018 04 25 Parametrisk punktskattning

STATISTIK!

Vår statistiska modell

1) Vi har en population av storlek N, ur vilken vi drar ett slumpis stickprov $X_1, X_2, \dots, X_n$ (av storlek n).
2) Vi kommer (nästan) alltid anta att $N = \infty$.
   Då blir $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid.
3) Vi antar att fördelningen av X_i är känd sånär som på värdet av en eller flera parametrar.

Ex: $X_i \sim Poi(\lambda)$ med (värdet på) λ okänt.

Ex: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ med μ och/eller σ^2 okänt.

Vi vill skatta (=gissa) parametrarna & vi låter θ utgöra den generiska beteckningen för dessa.

← hatt=gissning

Def en skattning är en funk. $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ av stickprovet $(X_1, \dots, X_n) = \overline{X}$.

Ex: 1) Om $\theta = \mu = \mathbb{E}[X_i]$, då använder vi skattningen

$$\hat{\theta}(X) = \hat{\mu} = (X_1 + \dots + X_n)/n = \overline{X}$$

2) Om $\theta = \sigma^2 = Var(X_i)$, då används ofta

$$\hat{\theta}(X) = \widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

om $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ är okänd. Alternativt använder vi

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2, \quad \text{om } \mu \text{ är känd.}$$

3) Om $X_i \sim Exp(\lambda)$ så är $\mu = \mathbb{E}[X_i] = \lambda^{-1}$. Därför är

$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$ naturligt (ty $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\mu}} = \frac{1}{\overline{X}}$)

Def 1) $\hat{\Theta}$ är väntevärdesriktig (VVR) om

$$\mathbb{E}[\hat{\Theta}(X)] = \Theta \quad (\textit{unbiased})$$

2) Effektiviteten (av VVR-skattningar) bedöms av variansen $\mathrm{Var}(\hat{\Theta}(X))$ (liten = bra).

3) $\hat{\Theta}$ är konsistent om $\hat{\Theta}(X) \xrightarrow{P} \Theta$, $n \to \infty$, dvs. om $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|\hat{\Theta}(X) - \Theta| > \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$.

Anm: 3) kräver $N = \infty$. Variant finns då $N < \infty$, detta kräver mycket extra räkning med relativt liten vinst.

Observera att $\hat{\Theta}(X)$ är en s.v. Fördelningen för $\hat{\Theta}(X)$ är av central betydelse.

Ex 1: betrakta $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Fördelningen av $\bar{X}$ är i allmänhet svåråtkomlig men:

i) $\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$ så VVR

ii) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\text{ober.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

iii) Vi har att $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \to 0$, $n \to \infty$ (STL), så $\bar{X}$ är konstant.

Ex 2: betrakta $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Lång räkning ger (s. 211-212) $\mathbb{E}[s^2] = \ldots = \sigma^2$, så VVR (därav $\frac{1}{n-1}$ istf $\frac{1}{n}$).

Ex 3: Vi vill skatta $p = \mathbb{P}(A)$ där A är ngn händelse (utvald person har cancer). Vi vill skatta p & låter

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om } A \text{ inträffar för individ } i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi tar $\hat{p} = \bar{X}$. Vi har att $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ s.a.

$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = p$ & $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$$= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2}\, np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Vi är ofta intresserade av $\operatorname{Var}(\hat{\theta}(X))$.

Def. standardfelet är $\sqrt{\operatorname{Var}(\hat{\theta}(X))}$ & betecknas ibland $D(\hat{\theta})$.

Anm: Ofta beror variansen $\operatorname{Var}(\hat{\theta}(X))$ på den okända parametern θ. Därför måste $D(\hat{\theta})$ skattas. Vi skattar en egenskap hos en skattare!

Ex: om $\bar{X}$ skattar μ har vi att $\operatorname{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
Vi kan skatta $\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})} = \sigma/\sqrt{n}$ med $S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$, där
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Ex: om $\hat{p}$ skattar p låter vi $s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.
Skatta $D(\hat{p}) = \sqrt{\operatorname{Var}(\hat{p})} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Men hur ska vi hitta en bra skattning/skattare?

Momentmetoden

Om $X_1, X_2, \ldots$ är iid med parameter θ är det ofta så att $E[X_1] = f(\theta)$, för någn (snäll) funk. f.

Gör följande:

1) observera att STL säger att för n stort är $\bar{X} \approx E[X_1]$
2) lös ut $\hat{\theta}$ ur ekvationen $\bar{X} = f(\hat{\theta})$

Vi ser att $f(\theta) = \mathbb{E}[X_1] \approx \overline{X} = f(\hat{\theta})$ & därmed bör också $\hat{\theta} \approx \theta$, s.a. $\hat{\theta}$ är en bra skattare.

Resultatet ($\hat{\theta}$) kallas för en MME-skattare (method of moments estimator).

Tal väntetiden på en buss anses vara $U[0, \theta]$ ...

a) hitta MME-skattare för θ.

b) om vi fick mätvärdena $x_1 = 8$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$, $x_4 = 15$, $x_5 = 11$ minuter, vilket blir det numeriska värdet på $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$?

a) om $X_1 \sim U[0, \theta] \Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = \theta/2$.

MM: $\overline{X} = \hat{\theta}/2 \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$ är vår MME-skattare.

b) vi får att $\hat{\theta}(x) = 2\bar{x} = 2 + \frac{x_1 + \ldots + x_5}{5} = 15.6$ minuter //

Om vi har två okända parametrar θ_1, θ_2 beräknar vi

$\mathbb{E}[X] = f_1(\theta_1, \theta_2)$, $\mathbb{E}[X^2] = f_2(\theta_1, \theta_2)$.

Vi ersätter $\overline{X} = f_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, $\overline{X^2} = f_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ & löser ut $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$.

Här är $\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

2018 04 25 Räkneövning 5
Konvergens

5.7 Visa att om $X_n \to c$ i sannolikhet & g är en kont. funk så $g(X_n) \to g(c)$ i sannolikhet.

Def konvergens i sannolikhet.
$X_n \to c$ i sanno. betyder att för varje $\varepsilon > 0$ gäller att
$P(|X_n - c| > \varepsilon) \to 0$ då $n \to \infty$.

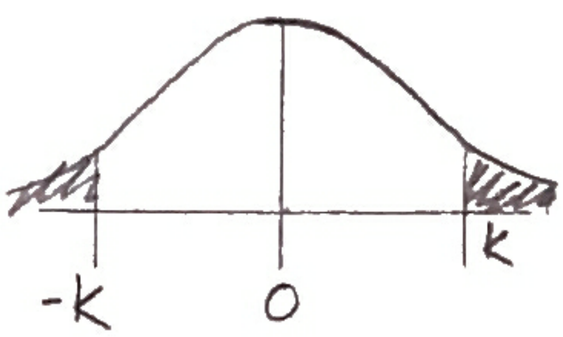
Def kontinuerlig funktion
Att g är en kont. funk. betyder att $\forall\, \varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ s.a. $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$

L Välj godt. $\varepsilon > 0$. g kont. $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ s.a. $|X_n - c| < \delta$
$\Rightarrow |g(X_n) - g(c)| < \varepsilon$.
$X_n \to c$ i sanno. $\Rightarrow P(|X_n - c| < \delta) \to 1$, då $n \to \infty$.
Eftersom $|X_n - c| < \delta$ implicerar händelsen $|g(X_n) - g(c)| < \varepsilon$,
gäller $P(|g(X_n) - g(c)| < \varepsilon) \to 1$ då $n \to \infty$.

5.12 Anta att värden avrundas & att avrundningsfelet är uniformt fördelat på $[-1/2, 1/2]$. 100 värden summeras, approximera sanno. att det totala avrund. felet blir större än
a) 1 b) 2 c) 10

L Y_i : avrund felet för värde i, $Y_i \sim U[-1/2, 1/2]$
X : totala felet, $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$

Centrala gränsv. satsen ger $\frac{X}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(Y_i)}} \overset{\text{approx.}}{\sim} N(0,1)$
$\mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1}{12}$, $n = 100$



$$P(|X|>k) = 2P(X>k) = 2(1-P(X\le k))$$

$$P(X\le k) = P\left(\frac{X}{\sqrt{\frac{100}{12}}} \le \frac{k}{\sqrt{\frac{100}{12}}}\right), \quad \frac{k}{\sqrt{\frac{100}{12}}} = \frac{2\sqrt{3}k}{10} = \frac{\sqrt{3}k}{5}$$

a) $k=1$, $\frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}3464$, $P(Z \le \frac{\sqrt{3}}{5}) \approx 0{,}6368$ ← tabell i boken

$P(|X|>1) = 2(1-0{,}6368) \approx 0{,}726$

b) $k=2$, $\frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}6928$, $P(Z \le 2\sqrt{3}/5) \approx 0{,}7549$

$P(|X|>2) \approx 0{,}490$

c) $k=5$, $\sqrt{3} = 1{,}732$, $P(Z \le \sqrt{3}) \approx 0{,}9582$

$P(|X|>5) \approx 0{,}0836$

5.29 Låt $U_i \sim U[0,1]$, $i=1,\dots,n$ oberoende.
Låt $U_{(n)} = \max(U_1,\dots,U_n)$. Ange fördelningsfunktionen för $U_{(n)}$. Hitta en standardisering av $U_{(n)}$ samt visa att fördelningsfunktionen för den standardiserade variabeln går mot ett värde som ej beror på n, då $n \to \infty$.

$$F_{U_{(n)}}(x) = P(U_{(n)} \le x) = P(\max(U_1,\dots,U_n) \le x) = P(U_1 \le x \cap \dots \cap U_n \le x) =$$
$$= P(U_1 \le x)^n = x^n$$

Låt X_n vara en standardiserad $U_{(n)}$. Vi sätter $X_n = \frac{U_{(n)} - a_n}{b_n}$ & vill hitta a_n & b_n.

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x) = P\left(\frac{U_{(n)} - a_n}{b_n} \le x\right) = P(U_{(n)} \le xb_n + a_n) = (xb_n + a_n)^n$$

Välj $b_n = \frac{1}{n}$ & $a_n = 1 \Rightarrow F_{X_n}(x) = \left(\frac{x}{n}+1\right)^n \to e^x$ då $n \to \infty$ för $x \le 0$ & 1 annars.

7.4 Medelvärdet skattas i två populationer genom slumpvis urval. Population 1 har sann standardavvikelse σ & urvalets storlek är n. Population 2 har sann

stand. avvik. 2σ & storlek $2n$ på urvalet.
Vilken skattning förväntas vara bäst?

2 $Var(\overline{X}_1) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1,i}\right) = \frac{1}{n^2}\sum Var(X_{i,i}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$Var(\overline{X}_2) = \frac{(2\sigma)^2}{2n} = \frac{2\sigma^2}{n} = 2\,Var(\overline{X}_1)$

$\Rightarrow$ skattningen för pop 1 förväntas vara bäst.
(Båda är väntevärdesriktiga, $E(\overline{X}_1) = E(X_{1,i})$
$E(\overline{X}_2) = E(X_{2,i})$

20180502 Kom ihåg

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov & vi vill skatta parametern θ.

Def Då θ är okänd skriver vi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$ för den gemensamma tfkn/sf, för s.v. $X_1, \ldots, X_n$.

Anm: 1) i det diskreta fallet är kanske $p(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$ en mer naturlig notation. Det blir mkt opraktiskt att använda olika notation för diskret/kontinuerlig.

2) om $X_1, \ldots, X_n$ är ober. får vi att $f(x_1, \ldots, x_n|\theta) =$
$= f(x_1|\theta) f(x_2|\theta) \ldots f(x_n|\theta)$.

3) vi skriver $f(\cdot|\theta)$ för att poängtera att $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ är okänd.

Def givet observerade data $x_1, \ldots, x_n$ (dvs. $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$)
def. vi likelihooden av θ som $lik(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$

Anm: 1) observera att $lik(\theta)$ ses som en funk. av θ, ej av de uppmätta värdena $x_1, \ldots, x_n$.

2) om $X_1, \ldots, X_n$ är diskreta & ober så blir $lik(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$
$= P(X_1 = x_1|\theta) \ldots P(X_n = x_n|\theta)$.
Alltså är $lik(\theta)$ sanno. att få de uppmätta värdena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som funk. av θ.

Def ML-skattaren (Maximum Likelihood Estimator, MLE) av θ är det värde $\hat{\theta}$ som maximerar $lik(\theta)$.

Anm: 1) i det diskreta fallet är $\hat{\theta}$ det värde på θ som gör de observerade värdena (data) mest troligt (most likely)

2) det kont. fallet är analogt om än ngt mer svårtolkat

Vi kommer hitta maximera lik(θ). Ofta är det enklast att maximera $l(\theta) = \log(lik(\theta)) = \sum_{i=1}^{n} \log(f(x_i|\theta))$

Anm: om $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ är alltså° $lik(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) =$ $lik(\theta, x_1, \dots, x_n)$. Man skriver ofta $lik(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\theta) =$ $lik(\theta, X_1, \dots, X_n)$. Detta är analogt med hur $\mathbb{E}[X|Y]$ definierades av att den blev $\mathbb{E}[X|Y=y]$ om händelsen $Y=y$ inträffade.

ober. Antar numera alltid ober.

Tal Låt $X_1, \dots, X_n$ vara iid $Poi(\lambda)$

a) hitta MME'n $\hat{\lambda}$ b) hitta MLE'n $\hat{\lambda}$

L a) då° $X_i \sim Poi(\lambda)$ är $\mathbb{E}[X_i] = \lambda$.

MM: $\bar{X} = \hat{\lambda}$ (så° trivialt) $\hat{\lambda} = \bar{X}$

b) vi har att $lik(\lambda) = f(k_1, \dots, k_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(k_i|\lambda) =$

$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda}$

alt. $lik(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda}$.

$\Rightarrow l(\lambda) = \log(lik(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} (X_i \log(\lambda) - \log X_i! - \lambda) =$

$= \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log X_i!$.

Detta ska maximeras: $l'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i - n$, $l''(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i < 0$ om $\neq 0$

i) Så° $l'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

Dessutom är då° $lik''(\lambda) < 0$ om $\neq 0$ s.a. $\hat{\lambda} = \bar{X}$ maximerar $l(\lambda)$

ii) Om nu $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow lik(\lambda) = e^{-n\lambda}$ maximeras av $\lambda = 0$ (ty $\lambda \geq 0$) s.a. återigen blir $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

Anm: om bytet $k_i \rightarrow X_i$ ej genomförts: om $X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$

Tal låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara iid $N(\mu, \sigma^2)$

a) hitta MME'n för μ & σ^2

b) hitta MLE'n för μ & σ (ej σ^2)

2 a) vi har att $E[X] = \mu$ & $E[X^2] = Var(X) + E[X]^2 = \sigma^2 + \mu^2$.

Enl. momentmetoden ska vi sätta $\overline{X} = \hat{\mu}$ & $\overline{X^2} = \hat{\sigma^2} + \hat{\mu}^2$.

Vi får att $\hat{\sigma^2} = \overline{X^2} - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + \overline{X}^2 - 2X_i\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ //

b) vi har att $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x_1, \dots x_n \mid \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n}(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$

$\Rightarrow L(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)\right) =$

$= -n\log\sigma - n\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$. Vi hittar max:

$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$, $\frac{dL}{d\sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

villkoret $\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = n\mu + \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$,

Vidare är $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \{\mu = \overline{x}\} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$,

om $\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$.

Övning: har vi hittat maximat? (Ja)

Om $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ så är $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

alt. $\hat{\mu} = \overline{X}$ $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

Anm: $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \mathbb{E}[\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2] =$

$= \mathbb{E}[\frac{n-1}{n} S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ så ej VVR.

Man justerar sina skattare!

Observera även att om $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ är VVR, så har vi att

$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\sqrt{S^2}] \neq \sqrt{\mathbb{E}[S^2]} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

så S är ej en VVR-skattare av σ.

I allmänhet $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X]}$ om $X \geq 0$

20180507 Kom ihåg

Vi hade $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid, med okänd parameter θ.

Vi (punkt-)skattar θ mha $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$. Här är $\hat{\theta}$ en s.v.

Efter mätning då data $x_1, \ldots, x_n$ har blivit observerade blir den (numeriska) realiserade gissningen (av θ)

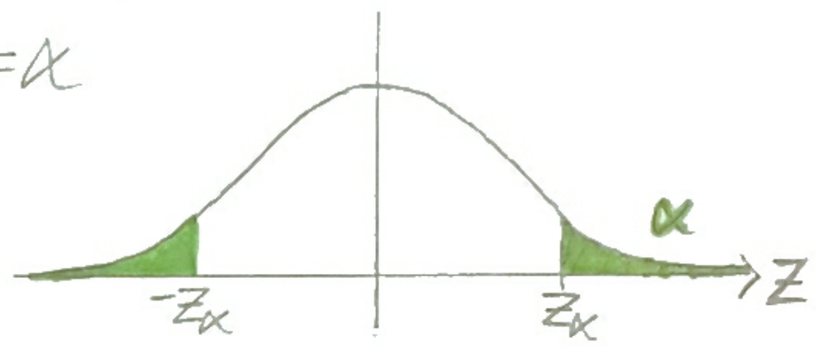
$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$

Obs. ofta kallas både $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ & $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ för skattning (estimate). Vissa skiljer på de två (skattare/skattning alt. estimator/estimate).

Def. för $Z \sim N(0,1)$ & $0 \le \alpha \le 1$ def. vi z_α via $\mathbb{P}(Z \ge z_\alpha) = \alpha$.

Anm: symmetri ger $\mathbb{P}(Z \le z_\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-z_\alpha \le Z \le z_\alpha) = 1 - 2\alpha$



Sats Låt $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ & $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ vara ober.

Då gäller att $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Bevis Vi har att $M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t^2}$, $i = 1, 2$.

Då gäller $M_{X_1+X_2}(t) \overset{\text{ober.}}{=} M_{X_1}(t)\, M_{X_2}(t) = e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t} =$

$= e^{(\mu_1+\mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$ ▨

Vi har lärt oss hur vi gör en pktskattning, men hur bra är den?

Konfidensintervall (K.I.)

Fall 1 Antag $X_1, X_2, \ldots$ iid $N(\mu, \sigma^2)$ med σ känd.

Vi skattar μ med $\hat{\mu}(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}$. Vi vet $X_1 + \ldots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

(enl. satsen ovan)

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Kom ihåg: $\bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2)$
$\Rightarrow \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Vi får

$$1-\alpha = P(-z_\alpha \le Z \le z_\alpha) = P(-z_\alpha \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_\alpha) = P(-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) =$$

$$= P(\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Dvs. med sanno. $1-\alpha$ tillhör μ det slumpmässiga intervallet $I_\mu = [\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$. I_μ är ett K.I. för μ med konfidensgrad $1-\alpha$.

Efter att data $x_1, x_2, \dots, x_n$ har observerats bildas det numeriska K.I. $I_\mu = [\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Def låt $\underline{\theta} \le \bar{\theta}$ vara skattningar av θ. Om $P(\underline{\theta}(X) \le \theta \le \bar{\theta}(X)) = 1-\alpha$ sägs intervallet $I_\theta = [\underline{\theta}(X), \bar{\theta}(X)]$ vara ett K.I. för θ med konfidensgraden $1-\alpha$.

Anm: i) $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ är "under"- resp "överskattning" av θ

(ii) om $\underline{\theta}$ är $-\infty$ (alt. $\bar{\theta} = \infty$) kallas intervallen $(-\infty, \bar{\theta}]$ (alt. $[\underline{\theta}, \infty)$) ensidiga K.I.

(iii) Fall 1 fungerade för att <u>referensvariabeln</u> $R := \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ innehöll μ & hade känd fördelning.

Fall 2 Återigen är $X_1, X_2, \dots$ iid. $N(\mu, \sigma^2)$ men här är både μ & σ^2 okända.

Vi skattar σ^2 med $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ & bildar $R = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N$?

Def en s.v. X med tfkn $f(s) = C\left(1+\frac{s^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$ för $s \in \mathbb{R}$, är t-fördelad med n frihetsgrader ($X \sim t(n)$).

Sats För $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$ gäller att $R = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Bevis Orgie i mgf, se kap 6 ▨

Anm: i) tfkn för $t(n)$ är symmetrisk.

ii) om $X_n \sim t(n) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} Z$, $n \to \infty$, där $Z \sim N(0,1)$ (dvs. $t(n) \to N(0,1)$).

iii) vi använder tabeller för $t_\alpha(n)$ där $\alpha = \mathbb{P}(T \geq t_\alpha(n))$ där $T \sim t(n)$.

åter till fall 2

$R = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ får vi att $1-\alpha = \mathbb{P}(R \leq t_\alpha(n-1)) =$

$= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_\alpha(n-1)\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X}-\mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right) = \mathbb{P}\left(\mu \geq \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right)$

s.a. $I_\mu = \left[\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \infty\right)$ är ett ensidigt K.I. för μ med konfidensgrad $1-\alpha$.

Anm: om $\mathbb{P}(\underline{\mu}(X) < \mu < \overline{\mu}(X)) = 1-\alpha$ & $\underline{\mu} > 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1}{\overline{\mu}(X)} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\underline{\mu}(X)}\right) = 1-\alpha$

s.a. $I_{\mu^{-1}} = \left[\frac{1}{\overline{\mu}(X)}, \frac{1}{\underline{\mu}(X)}\right]$ är ett K.I. för μ^{-1} med konf.grad $1-\alpha$.

Tal utfallen av en serie experiment anses komma från en $N(\mu, \sigma^2)$. Med $n=13$ datapkter erhölls:

2.81, 5.14, 2.39, 2.63, 7.47, 7.23, 7.85, 5.01, -0.68, 5.15, 7.89, 4.47, 6.1

a) skatta μ & σ^2 b) hitta ett 99% (tvåsidigt) K.I. för μ

2 a) då $X_1, X_2, \ldots, X_{13} \sim N(\mu, \sigma^2)$ (oberoende!?) använder vi $\hat{\mu} = \bar{X}$ & $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ som är VVR.

Insättning av data ger de numeriska skattningarna

$\hat{\mu}(x) = \bar{x} \approx 4.84$ & $s^2(x) \approx 6.21$

b) Vi har att $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) = t(12)$.

Tabell ger $1-0.01 = P(-3.05 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S\sqrt{n}} \leq 3.05) = P(\bar{X} - 3.05\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 3.05\frac{S}{\sqrt{n}})$

tvåsidigt, $2 \cdot 0.005 = 0.01$ totalt $\longrightarrow$ $t_{0.005}(12)$

S.a. med sanno. 99% har vi att $\mu \in [\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}3.05, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}3.05]$.

Vårt 99%-numeriska K.I. blir

$I_\mu = 4.84 \pm 3.05\frac{\sqrt{6.21}}{\sqrt{13}} = [2.73, 6.95]$.

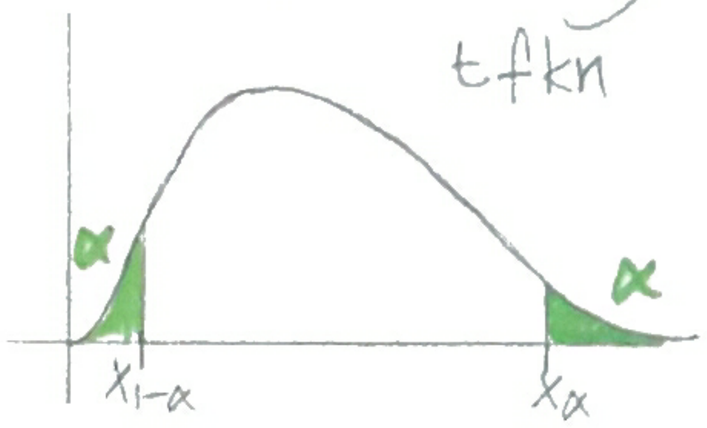
2018 05 08 Generella idén bakom K.I.

Steg 1 hitta en referensvariabel R där
$X_1, \dots, X_n$ & θ ingår. R väljs s.a. dess fördelning är känd.

Steg 2 hitta lämpliga kvantiler (z_α, t_α, ...)

Steg 3 lös ut θ ur uttrycket $1-\partial\alpha = \mathbb{P}(x_{1-\alpha} \leq R \leq x_\alpha)$ eller motsvar.

Anm: om fördelningen för R är symmetrisk $\Rightarrow x_{1-\alpha} = -x_\alpha$



Normalapproximation för K.I.

Vi betraktar proportions-skattning. Principen samma i andra fall.

Antag att i en population så har proportionen p en viss egenskap. Vi tar ett stickprov av storlek n & låter $X = \#$ med egenskapen. Vi antar att $X \sim Bin(n,p)$ (ok? oberr. ?!)
Vi pktskattar p med $\hat{p} = \frac{X}{n}$, men hur hittar vi ett K.I.?

Alt 1 använd exakt fördelning (dvs $X \sim Bin(n,p)$). (steg 1)

steg 2: hitta k_α s.a. $\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| > k_\alpha) = \partial\alpha$.

steg 3: $\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| > k_\alpha) = \mathbb{P}(-k_\alpha < \frac{X}{n} - p < k_\alpha) = \mathbb{P}(\frac{X}{n} - k_\alpha < p < \frac{X}{n} + k_\alpha)$.

ok? Nej! Värdet på k_α kommer bero på p som är okänd.
Dessutom är X ej symm., bör då K.I. vara det? ($k_{1-\alpha} = -k_\alpha$)

Alt 2 om n är "stort" ger CGS att $X \approx N(\mathbb{E}[X], Var(X)) =$ (centrala gränsv. satsen)
$= N(np, np(1-p))$

$$\Rightarrow \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0,1) \quad \text{(steg 1)}$$

steg 2: kvantiler (z_α) är kända.

steg 3: lös ut p ur $P\left(-z_\alpha \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le z_\alpha\right)$

steg 3': lös ut p ur $P\left(-z_\alpha \le \frac{X-np}{\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}} \le z_\alpha\right) = P\left(-z_\alpha\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \le X-np \le z_\alpha\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}\right) = P\left(\frac{X}{n} - z_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \frac{X}{n} + z_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$.

gör 3'

Anm: principen densamma, men detaljer skiljer ngt fall till fall.

K.I. för σ^2 då $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Låt $X_1, \dots, X_n$ vara iid $N(\mu, \sigma^2)$ & låt $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Def en s.v. Y är chi-kvadrat fördelad med n frihetsgrad, om $Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$, där Z_i är iid $N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$

Sats $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

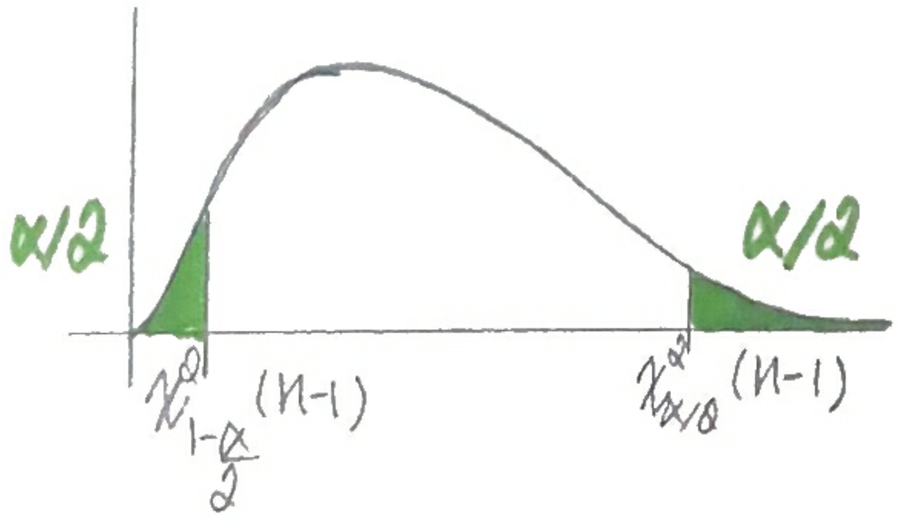
Bevis Lång räkning med mgf. ∎

Låt $\chi^2_\alpha(n-1)$ vara α-kvantilen för $\chi^2(n-1)$-förd.

Vi hittar ett K.I. med konfidensgrad $1-\alpha$ genom att

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

Anm:



ej symmetrisk!

dvs. $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \neq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

Tal 1 forts från 7/5)

Data kom från en normalfördelning. ($X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$)

d vi fick $\bar{x} = 4.84$, $s^2(x) \approx 6.81$ & $n = 13$.

c) hitta ett 95% K.I. för σ^2!

d enl. ovan är $I_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)s^2(X)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2(X)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$ ett K.I. för σ^2 med konfidensgrad $1-\alpha$.

med $\bar{X} = \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$

Här är $\alpha = 0.05$ & $n = 13$. Tabell (s. A8 i Rice) ger

$\chi^2_{0.025}(12) \approx 23.34$ & $\chi^2_{0.975}(12) \approx 4.40$

s.a.

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{12 \cdot 6.81}{23.34}, \frac{12 \cdot 6.81}{4.40}\right] \approx [3.19, 16.94]$$

är ett numeriskt 95% K.I. för σ^2.

Två stickprov

Vi har 2 ober. stickprov $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ resp. $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$

där $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ & $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Vi vill analysera $\Theta = \mu_1 - \mu_2$ som skattas med $\hat{\Theta} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$.

Fall 1 (σ_1^2, σ_2^2 kända)

Vi har att $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n)$ & $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/m)$ s.a.

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m})$.

Låt $D^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$ och bilda $R = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{D} \sim N(0,1)$

$$1-\alpha = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le R \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\frac{\alpha}{2}} D \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{X} - \bar{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}} D\right)$$

$$\Rightarrow I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} D$$

Tal I en undersökning uppmättes surheten i två olika sjöar. Den första kontrollerades på $n = 20$ platser & den

andra på $m=29$. Resultaten av mätningarna anses vara ober. & $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ resp. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ fördelade. Om $\sigma_1^2=1.24$ & $\sigma_2^2=1.9$, hitta ett 95% K.I. för $\mu_1-\mu_2$ om data gav $\bar{x}=5.3$ & $\bar{y}=6.1$.

$N(0,1)$ ger $z_{0.025}\approx 1.96$, 95% konf.

Vi får att $D=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\approx 0.368$. Tabellger

så ett 95% numeriskt K.I. blir $I_{\mu_1-\mu_2}=\bar{x}-\bar{y}\pm 1.96\cdot 0.368$

$\approx[-1.52, -0.079]$ //

Anm: har vi fog att hävda att sorheterna skiljer sig mellan sjöarna? O inte med i $I_{\mu_1-\mu_2}$, ok?

Antag nu att $X_i\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ & $Y_i\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

$\Rightarrow \bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma^2(n^{-1}+m^{-1}))$.

Hur ska σ^2 skattas?

$$S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad S_Y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2.$$

Man kan visa att $S_p^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$ är VVR & har minst varians av alla skattare på formen $\beta S_X^2+(1-\beta)S_Y^2$.

20180509 Två stickprov forts.

Antag att $X_1,\dots,X_n$ & $Y_1,\dots,Y_m$ är ober. med $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ medans $Y_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ (samma varians!)
Vi får att $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n)$ & $\bar{Y} \sim N(\mu_0, \sigma^2/m)$ s.a. $\theta = \mu_1 - \mu_0$ skattas av $\hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_0, \sigma^2(n^{-1}+m^{-1}))$

Obs. $Var(\bar{X}-\bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(-\bar{Y}) + 2Cov(\bar{X},-\bar{Y}) =$
$= Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) - 2Cov(\bar{X},\bar{Y}) \overset{\text{ober.}}{=} Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y})$

Här är σ^2 okänd & skattas mha $S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$.

Vi använder $R = \frac{\hat{\Theta}(\bar{X},\bar{Y}) - \Theta}{S_p(\bar{X},\bar{Y})\sqrt{n^{-1}+m^{-1}}}$

Sats Om R är som ovan gäller att $R \sim t(n+m-2)$

Vi får att $1-2\alpha = \mathbb{P}(|\hat{\Theta}-\Theta| \le t_\alpha(m+n-2) S_p(\bar{X},\bar{Y})\sqrt{n^{-1}+m^{-1}})$
s.a. ett K.I. med konf.grad $1-2\alpha$ för Θ ges av
$I_\Theta = \bar{X} - \bar{Y} \pm t_\alpha(m+n-2) S_p(\bar{X},\bar{Y})\sqrt{n^{-1}+m^{-1}}$

Tal (som sura sjöar) 2 sjöar, $n=20$, $m=29$, $\hat{\mu}_1 = \bar{x} = 5.3$, $\hat{\mu}_2 = \bar{y} = 6.1$
$S_x^2 = 1.52$, $S_y^2 = 1.83$.
Hitta ett 95% K.I. för $\mu_1 - \mu_2$.

2 Vi slår ihop skattningarna för σ^2
$S_p^2 = \frac{19}{47} S_x^2 + \frac{28}{47} S_y^2 = \frac{19}{47} 1.52 + \frac{28}{47} 1.83 \approx 1.705$

Enl. tabell är $t_{0.025}(47) \approx 2.01$

Obs. Tabell anger $t_{0.025}(40)$ & $t_{0.025}(60)$, vi interpolerar.
(Vi ger inte upp eller ngt annat åt hellskotta)

interpolera på känsla!

Så ett 95% numeriskt K.I. blir

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \bar{x}-\bar{y} \pm t_{0.025}(47)\, S_p(\bar{x},\bar{y})\sqrt{\tfrac{1}{20}+\tfrac{1}{29}} \approx [-1.563, -0.037] \;//$$

Vi har (minst) fallet $\sigma_1 \neq \sigma_2$ okända. Vi skippar detta!

Man kan förstås tänka sig två stickprov där data ej kommer från en normalfördelning.

Tal två väljarundersökningar genomfördes med fyra månaders mellanrum. Resultatet för parti Q blev

1) 143 av $n_1 = 1217$ tillfrågade stöttade Q.

2) 139 av $n_2 = 1078$ -"-

Skapa ett 99% K.I. för $p_2 - p_1$, där p_i är Q's väljarantal vid undersökning i.

Låt $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ & $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ där X_i = # anhängare vid unders. i

Obs, X_i är en s.v. dvs. "innanperspektiv".

Vi har att $X_i \sim Bin(n_i, p_i)$ s.a. $\hat{P}_i \overset{CGS}{\approx} N(\mathbb{E}[\hat{p}_i], Var(\hat{p}_i)) =$

$= N(p_i, \frac{p_i(1-p_i)}{n_i})$

$\Rightarrow \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N(p_1-p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$.

Vi ersätter variansen av skattningen $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ med skattn. av denna varians $s^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}$.

Vi låter $R = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1-p_2)}{s_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} \sim N(0,1)$

Tabellger $0.99 = P(-2.575 \leq Z \leq 2.575)$, $Z \sim N(0,1)$

$\approx P\left(-2.575 \leq \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (P_1 - P_2)}{S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}} \leq 2.575\right)$

$= P(\hat{P_1} - \hat{P_2} - 2.575\, S_{\hat{P_1} - \hat{P_2}} \leq P_1 - P_2 \leq \hat{P_1} - \hat{P_2} + 2.575\, S_{\hat{P_1} - \hat{P_2}})$

Ett 90% numeriskt K.I blir $I_{P_1 - P_2} = \hat{P_1}(x) - \hat{P_2}(x_2) \pm 2.575 S_{\hat{P_1} - \hat{P_2}}(x_1, x_2)$

$\approx [-0.047, 0.024]$ //

Anm: har vi fog att hävda att sympatierna har förändrats? ($p_1 \neq p_2$)? Antagligen nej, då $0 \in I_{P_1 - P_2}$.

Stickprov i par

Dyker upp naturligt när vi har ett tydligt "före-/efter-perspektiv".

Tal halten bly uppmäts i 20 vattendrag som ligger i anslutning till en nyetablerad fabrik. Mätningen genomfördes innan & sedan igen ett år efter att fabriken startades.

Resultatet av mätningarna blev:

Drag nr.	1	2	3	4	.....	19	20
Innan	1.7	1.6	2.7	4.3		0.7	2.9
Efter	1.9	1.5	3.1	3.9		0.8	3.4

Under antagandet att mätningarna kommer från normalfördelningar, bestäm ett 99% K.I. för skillnaden i halten bly.

Anm: låt μ_k = halten bly i vattendrag k innan mätning.

Det är rimligt att förvänta sig skillnader mellan vattendragen, dvs. $\mu_1 \neq \mu_2$ etc. Vi antar dock att skillnaden Δ innan/efter är densamma för alla vattendrag, dvs.

$\mu_1 \to \mu_1 + \Delta$, $\mu_2 \to \mu_2 + \Delta$, ..., $\mu_{20} \to \mu_{20} + \Delta$.

Vi vill skatta Δ!

Vad innebär normalantagandet?

Jo: X_k = uppmätt halt i drag k innan

Y_k = -"- efter

$\Rightarrow X_k \sim N(\mu_k, \sigma_1^2)$ & $Y_k \sim N(\mu_k + \Delta, \sigma_2^2)$,

och därmed blir $Z_k := Y_k - X_k \sim N(\Delta, \underline{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

lika

$\Rightarrow$ Vi skattar Δ med $\hat{\Delta} = \bar{Z}$ där $Z_k \sim N(\Delta, \underline{\sigma^2})$.

Vi får att $R = \frac{\hat{\Delta} - \Delta}{S(Z)/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

Detta ger oss $\bar{z} = 0.42$ & $s_z = 0.32$ s.a.

$I_\Delta = \bar{z} \pm t_{0.005}(19) \frac{s_z}{\sqrt{20}} = 0.42 \pm 2.86 \frac{0.32}{\sqrt{20}} = 0.42 \pm 0.205$ //

Anm: parat stickprov reduceras till ett stickprov!