Matematisk Statistik 2015

anteckningar: Anton Älgmyr

föreläsare och examinator: Olle Nerman

Innehållsförteckning

1 Föreläsning 1 23 mars 2015

1.1 Utfall och händelser

Kastar en tärning.

Utfallsrum: $\underbrace{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}_{\text{mängd av alla möjliga utfall}}$

Likformig (klassisk) sannolikhetsfördelning: ändligt många utfall med samma sannolikhet.

En händelse $A\subseteq\Omega$. Var noga med beteckningar i extremfall.

Exempel $A=\text{utfallet udda poäng}=\{1,3,5\}$

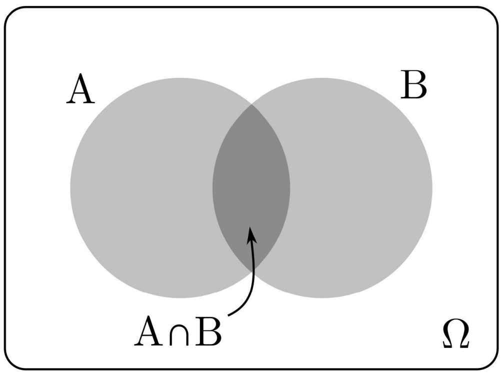
$B=\text{poängtal }\underbrace{\text{mindre än}}_{<3}3=\{1,2\}$

$C=\text{poängtal }\underbrace{\text{högst}}_{\leq 3}3=\{1,2,3\}$

Våra språkliga uttryck kan (ibland tvetydigt) översättas

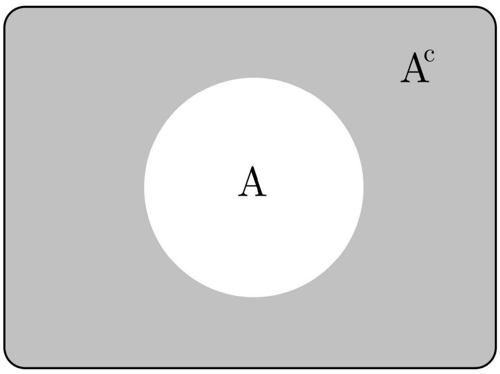
$$\begin{array}{lcl} A \text{ och } B & \iff & A\cap B \\ A \text{ eller } B \longrightarrow A \text{ och eller } B & \iff & A\cup B \\ A \text{ eller } B \longrightarrow A \text{ och eller } B\text{, men inte båda} & \iff & A\,\Delta\,B \end{array}$$

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$



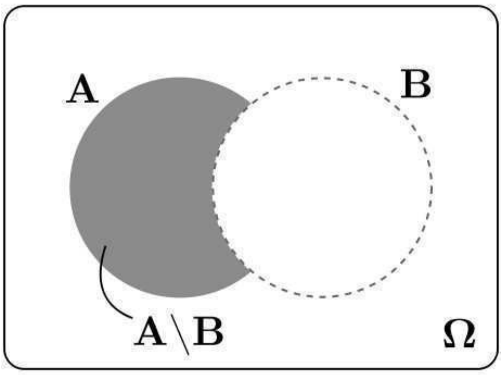
Figur. Venn-diagram illustrerande A, B, C och Ω.

$$\text{Inte } A \quad\longrightarrow\quad \Omega \text{ men inte } A \iff A^c=\Omega\backslash A.$$



Figur. Venn-diagram för komplement.

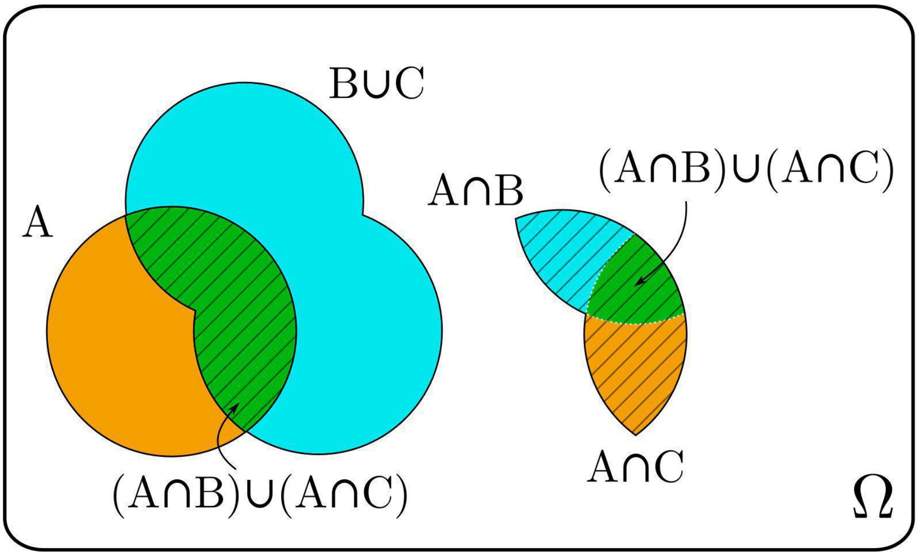
$$A \text{ men inte } B \iff A \backslash B$$



Figur. Venn diagram för inte, relativt komplement.

1.2 DeMorgans lagar

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$



Figur. Venn-diagram med tre skärande mängder som "bevis" för en av deMorgans lagar.

1.3 Lag kring komplement

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

1.4 Likformiga sannolikheter

$$\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

Samma sannolikhet för varje utfall

$$A \subseteq \Omega \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n}$$

där n är antalet möjliga utfall, $n(A)$ är utfall $\in A$, så antalet “gynnsamma” fall.

1.4.1 Tärningsexempel

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\text{udda poäng}) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
P(B) &= P(\{1,2\}) = \frac{n(\{1,2\})}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{6} = \frac{n(\{1,2,3,5\})}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

[Venn-diagram 2 mängder som visar att skärningen räknas två gånger]

[Venn-diagram 3 mängder som visar $P(A \cap (B \cup C))$, räknar antal för första och andra termen]

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

1.5 Icke-likformiga sannolikheter

$$\Omega = \{u_1, ..., u_n\}$$

$$P(u_i) \geq 0, \quad P(u_1) + ... P(u_n) = 1$$

Falsk tärning $P(\text{udda}) = P(u_1) + P(u_3) + P(u_5)$

Generellt $D \subseteq \Omega \quad P(D) = \sum_{u \in D} P(u)$

1.6 Disjunkta mängder

Givet utfallsrum Ω där händelser A uppfyller

$$A \subseteq \Omega \implies 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\Omega) = 1$$

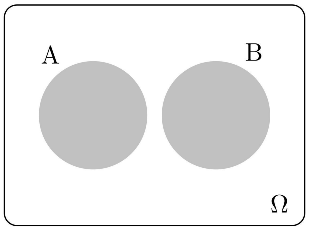
gäller att

$$A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

det vill säga att sannolikhet för $A \cup B$ är summan för sannolikheter för A och B, givet att A och B är disjunkta mängder.

1.6.1 Generellt

$$A_1, A_2, ... \quad \text{uppräkneligt många parvis disjunkta mängder} \implies P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$



Figur. Venndiagram med disjunkta mängder.

1.7 Räknelagar

$$
\begin{aligned}
P(A^C) &= 1 - P(A) \\
P(\varnothing) &= 0 \\
P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

2 Föreläsning 2 25 mars 2015

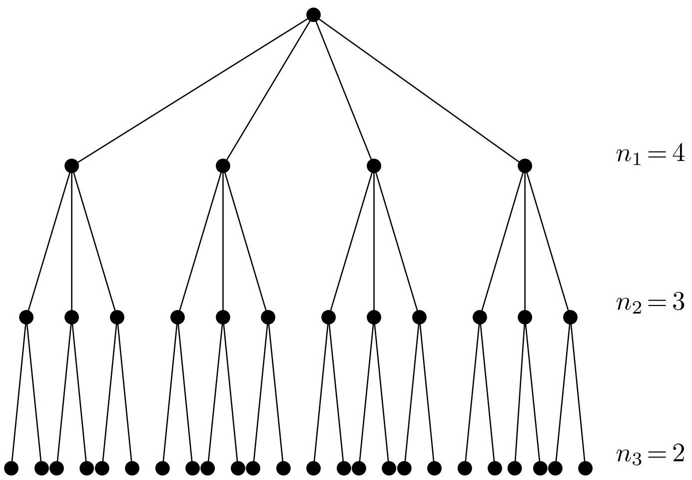
2.1 Mer om klassisk sannolikhetsdef.

- Betingade sannolikheter
- Bayes formel
- Totala sannolikhetslagen

2.2 Multiplikationsprincipen

Om vi tur och ordning utför k operationer och den första kan göras på n_1 den andra på n_2 osv. Då blir antalet möjliga "kombinationssätt"

$$n_1 n_2 \cdots n_k \quad \text{stycken.}$$



Figur. Decision tree.

Exempel A, B, C, D ska ställa sig i kö. Antal kombinationer blir $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Exempel Givet $A = \{1, 2, ..., n\}$, hur många delmängder finns det till A?

Skapa en delmängd genom n val	steg	1	skall	1	vara med i delmängd?	2 val
	steg	2	skall	2	vara med i delmängd?	2 val
				$\vdots$		
	steg	n	skall	n	vara med i delmängd?	2 val

Vilket ger totalt 2^n möjliga mängder.

Exempel Hur många delmängder finns det till A med exakt k element?

$k = 2$: $\frac{n(n-1)}{2}$

$k = n$: Antag att det finns x delmängder av storlek k.

$$\underbrace{x}_{\text{val av delmängd}} \cdot \underbrace{k(k-1)\cdots 1}_{\text{sätt att ordna k-tupel}} = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{\text{välja } k\text{-tipler (utan rep.) direkt}}$$

Vi definierar binominalkoefficienten

$$x = \binom{n}{k} = \frac{n \cdots (n-k+1)}{k\,(k-1) \cdots 1} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Uppkommer exempelvis vid expansion av monom

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdots (a+b)}_{n\,\text{st}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Multinomial

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n\\ k_1,k_2,k_3 \geq 0}} \binom{n}{k_1\,k_2\,k_3} a^{k_1}\, b^{k_2}\, c^{k_3} \quad \text{där} \quad \binom{n}{k_1\,k_2\,k_3} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}.$$

2.3 Case study — Poker

52 kort

4 färger $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$

13 valörer $1, 2, \ldots, 13$

Vi får 5 kort, antalet händer, utan ordning är

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Likformigt sannolikhetsfördelning.

2.3.1 "Färg (flush)"

$$\begin{aligned} n(\text{“färg”}) &= 4 \cdot \binom{13}{5} \\ P(\text{“färg”}) &= \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}. \end{aligned}$$

Alternativ, håll reda på ordning man får korten i

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \quad \text{sätt}$$

$$52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9.$$

2.3.2 "Två par"

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{Val av parvalör}} \cdot \underbrace{11}_{\text{Val av udda valör}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Parfärgerna i lägsta parv.}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Parfärgerna i högsta parv.}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Högsta parvalören}}$$

2.4 Betingade sannolikheter

2.4.1 Kast av en blå och en röd tärning

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(5,6),(6,6)\} \quad \text{där} \quad (a,b) = (\text{blå}, \text{röd})$$

$$n = n(\Omega) = 36$$

$P(\text{röd+blå=5}) = \frac{4}{36}$

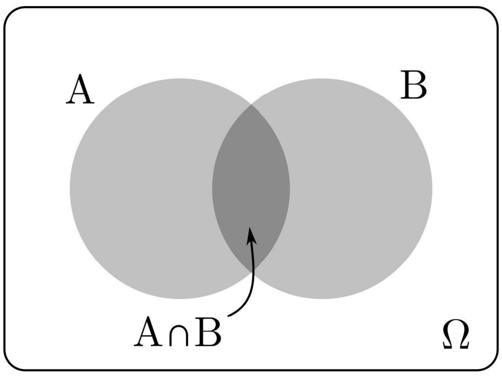
6	·	·	·	·	·	·
5	·	·	·	·	·	·
4	$\otimes$	·	·	·	·	·
3	·	$\otimes$	·	·	·	·
2	·	·	$\otimes$	·	·	·
1	·	·	·	$\otimes$	·	·
	1	2	3	4	5	6

$P(\text{summan=4} \,|\, \text{blå tärn=2}) = \frac{1}{6}$ ty svarar mot $P(\text{röd=2})$

$P(\text{summan=4} \,|\, \text{blå tärn=2}) = P(\text{röd tärn=2} \,|\, \text{blå tärn=2})$

6	·	$\otimes$	·	·	·	·
5	·	$\otimes$	·	·	·	·
4	·	$\otimes$	·	·	·	·
3	$\oplus$	$\otimes$	·	·	·	·
2	·	$\circledast$	·	·	·	·
1	·	$\otimes$	$\oplus$	·	·	·
	1	2	3	4	5	6

$$P(A|B) = P(A \cap B|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{krav} \quad P(B) > 0$$



Figur. Venndiagram visande $A \cap B$.

$$P(\text{summan=4}\,|\,\text{blå tärn=2}) = \frac{P(\text{summan=4 och blå tärn=2})}{P(\text{blå tärn=2})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{blå tärn=2}\,|\,\text{summan=4}) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A\cap B) = \underbrace{P(A|B)}_{\text{ofta denna man begriper}} P(B)$$

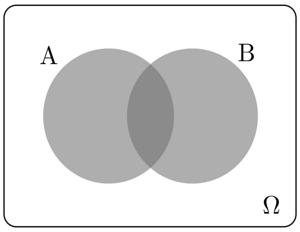
$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}P(B|A) \quad \text{(Bayes formel)}$$

[Venndiagram med en stor mängd B och en liten mängd A med skärning, gemensam bit ger att $A|B$ sannolikt med $B|A$, leder till "paradoxer"]

Givet disjunkta mängder $b_1, \ldots, b_n$ som täcker Ω,

$$P(A) = P(A\cap B_1) + \ldots + P(A\cap B_n) \quad \text{(total sannolikhetslag)}$$

3 Föreläsning 3 30 mars 2015



Figur. Venn-diagram med skärande A och B.

3.1 Betingade sannoliketer vid disjunkta händelser

3.1.1 Två händelser

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{om} \quad P(B) > 0.$$

Om $P(A|B) = P(A) \implies P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \underbrace{\implies}_{\text{def}}$ A och B oberoende händelser.

Exempel

$$\begin{array}{c|cccccc}
6 & \oplus & \oplus & \oplus & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & \circledast & \circledast & \circledast & \otimes & \otimes & \otimes \\
4 & \oplus & \oplus & \oplus & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \circledast & \circledast & \circledast & \otimes & \otimes & \otimes \\
2 & \oplus & \oplus & \oplus & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \circledast & \circledast & \circledast & \otimes & \otimes & \otimes \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

$$A = \text{Tärningskast 1} \leq 3, \quad B = \text{Tärningskast 2 udda}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} \quad P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A)\,P(B) = \frac{1}{4}$$

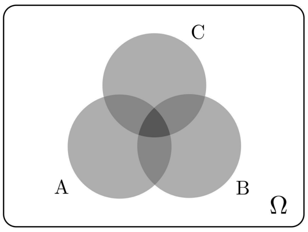
Exempel

$$\begin{array}{c|cccccc}
6 & \circledast & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & \cdot & \oplus & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & \cdot & \cdot & \oplus & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \cdot & \cdot & \cdot & \oplus & \cdot & \cdot \\
2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \oplus & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \oplus \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

$$A = \text{tärning 1 visar en etta}, \quad B = \text{summan av tärningarna är sju}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A)\,P(B) \quad P(B) = \frac{6}{36} \quad P(A) = \frac{1}{6}$$

3.1.2 Tre händelser



Figur. Venn-diagram med A,B,C.

$$\begin{array}{rcl} P(A\cap B) & = & P(A)\,P(B) \\ P(A\cap C) & = & P(A)\,P(C) \\ P(B\cap C) & = & P(B)\,P(C) \\ & \text{och} & \\ P(A\cap B\cap C) & = & P(A)\,P(B)\,P(C) \end{array}$$

3.1.3 Generellt

$$P(A_1^c\cap A_2\cap A_3\cap A_4^c\cap\cdots\cap A_n^c)=P(A_1^c)\,P(A_1)\cdots P(A_n^c)\quad \text{för alla } 2^n \text{ komb av komplement!}$$

3.2 Stokastiska variabler

Exempel

$X =$ *summan av tärningskasten*

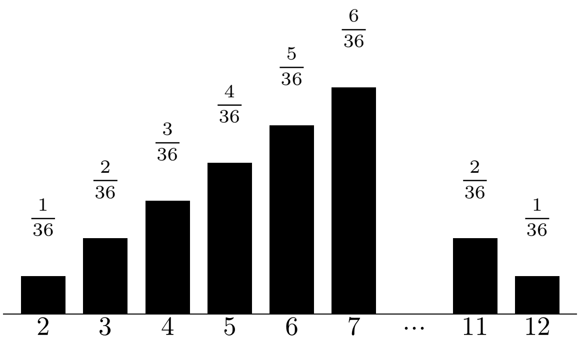
Stokastisk variabel – reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum (med ett sannolikhetsmått)

Möjliga värden på $X=\Omega_X=\{2,3,4,...,12\}\subseteq\mathbb{R}$. (utfallsrum)

$$P(\{\omega; X(\omega)=x\})=P(X=x)=p_X(x)\quad x\in\Omega_X$$

Sannolikhetsfunktion, diskret frekvensfunktionsrum.

$$\begin{array}{rc|cccccccl} & 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \otimes & \otimes & \leftarrow & X=12 \\ & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \otimes & \leftarrow & X=11 \\ & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ X=4\ \rightarrow & 3 & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & 2 & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ X=2\ \rightarrow & 1 & \otimes & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$



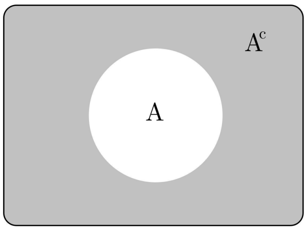
Exempel

$Y =$ maximum av de två poängen på tärning 1 och 2

$$\Omega_Y = \{1, ..., 6\} \qquad P_Y(y), \quad y \in \Omega_Y$$

$$\begin{aligned} P_Y(1) = P(Y=1) &= \frac{1}{36} \\ P_Y(2) = P(Y=2) &= \frac{3}{36} \\ &\vdots \\ P_Y(6) = P(Y=6) &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

3.2.1 Bernoullifördelning



Figur. Venn med A i Ω.

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{om} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

(Indikatorfunktion för händelsen A)

$$\Omega_{I_A} = \{0, 1\} \quad P_{I_A}(0) = 1 - P(A) \quad P_{I_A}(1) = P(A)$$

(Bernoulli-fördelad)

Exempel

$A =$ händelsen att vi får två sexor i kast med två tärningar

$$I_A \sim \text{Bernoulli} = \frac{1}{36}.$$

3.2.2 Binomialfördelning

Kast av en tärning n gånger.

X=Antalet 6:or bland de n kasten.

$$\begin{array}{ll} n=1 & P_X(0) = 1 - P_X(1) = \frac{5}{6} \\ & P_X(1) = \frac{1}{6} \\ n=2 & P_X(0) = \frac{5}{6}\frac{5}{6} = \frac{25}{36} \\ & P_X(1) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36} \quad \text{(det resterande)} \\ & P_X(2) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\ \text{n=n} & P_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-k} \\ & k = 0, 1, ..., n \\ & \text{(Binomialfördelad stokastisk variabel)} \end{array}$$

3.3 Kontinuerlig stokastisk fördelning

X stokastisk variabel $\quad \Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$

$$P_X(x_i) = p(x_i) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

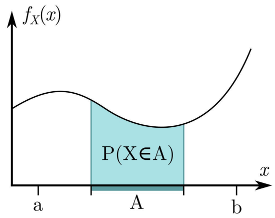
$$p(x_i) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$\Omega_X \subseteq \mathbb{R}$ Ett intervall, typiskt $[0,1], [a,b], [0,\infty)$ eller hela $\mathbb{R}$.

Sannolikstäthet:

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 && \text{på hela } \mathbb{R} \\ f_X(x) &= 0 && x \notin \Omega_X \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_X} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \end{aligned}$$

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x$$



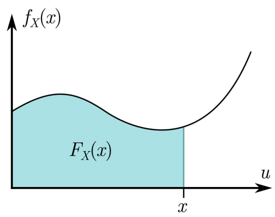
Figur. Intervallet $[a,b] = \Omega_X$, där A är delmängd av Ω_X och dess integral upp till $f_X(x)$ är utritad.

$$P(X \in A) = \int_A \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\ell(A)}{b-a}$$

3.4 (Kumulerad) fördelningsfunktion

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$$

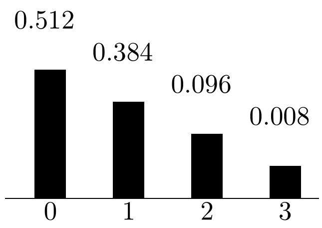
$$\iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = f_X(x)$$

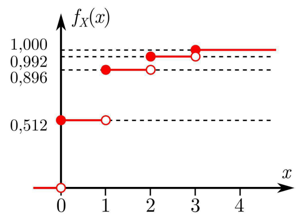


Figur. Graf med integral för kurva av u upp till x.

$X \sim$ Binomialfördelning$(3, p = 0,2)$

$$
\begin{aligned}
\Omega_X &= \{0, 1, 2, 3\} \\
P_X(0) &= \binom{3}{0} 0.2^0 (1 - 0.2)^3 = 0.8^3 \\
P_X(1) &= \binom{3}{1} 0.2^1 (1 - 0.2)^2 = 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 \\
P_X(2) &= \binom{3}{2} 0.2^2 (1 - 0.2)^1 = 3 \cdot 0.2^2\, 0.8 \\
P_X(3) &= \binom{3}{3} 0.2^3 (1 - 0.2)^0 = 0.2^3
\end{aligned}
$$





Figur. Graf $F_X(x)$ mot x.

$F_X(x)$ går från 0 till 1, specifikt

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &\longrightarrow 1 \quad \text{när} \quad x \to +\infty \\
F_X(x) &\longrightarrow 0 \quad \text{när} \quad x \to -\infty
\end{aligned}
$$

$$\sum_{x_i \leq x, x_i \in \Omega_X} P_X(x_i) = F_X(x).$$

3.5 Oberoende försöksupprepningar

3.5.1 Geometrisk fördelning

Gör oberoende försöksupprepningar tills A inträffar och $X =$ antalet försök som behövs.

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= p \\
P(X = 2) &= (1 - p)\, p \\
&\vdots \\
P(X = n) &= (1 - p)^{n-1}\, p
\end{aligned}
$$

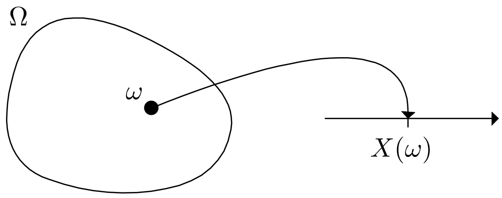
3.5.2 Negativ binomialfördelning

Gör oberoende försöksupprepningar tills A inträffar k gånger och $Y =$ antalet försök som behövs.

$$
\begin{aligned}
P(Y = n) &= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k}\, p \\
&\quad (p \text{ inträffar } k\text{:te gången i försök } n)
\end{aligned}
$$

4 Föreläsning 4 20 april 2015

4.1 Endimensionella diskreta SV



Figur. Mängddiagram med mängd Ω innehållande ω med pil till $X(\omega)$ på horisontell axel.

Ändligt eller uppräkneligt oändligt: $\Omega_X = \{X(\omega);\ \omega \in \Omega\}$. Sannolikhetsfunktion (PDF) för X (diskret frekvensfunktion)

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\omega \in \{X(\omega) = x\}) \quad x \in \Omega_X.$$

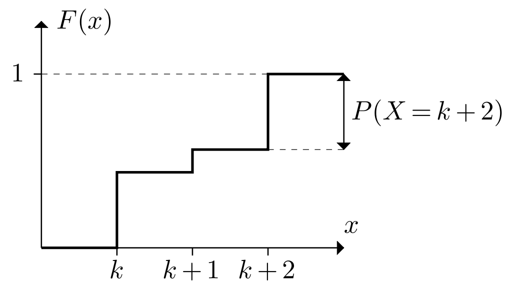
Beteckning för mängdnotation

$$P(x \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x), \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Kumulerad fördelningsfunktion (CDF)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \in \Omega_X, u \leq x} P_X(u), \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

har utseende som trappstegsfunktion.



Figur. Graf med F för k till $k + 2$, med annotation att steget vid $k + 2$ är sannolikhet att $X = k + 2$.

Exempel

Vänta på första 6:a när vi kastar en tärning upprepande gånger. $X =$ antalet kast som behövs.

Ω komplicerat, men detta kan undvikas.

$$\begin{aligned} p_X(k) = P(X = k) &= P(\text{inte 6:a i de } k-1 \text{ första försöken och 6:a i försök } k) \\ &= \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}}_{\text{geometrisk frekvensfunktion, } \frac{1}{6}}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(Lätt att se att $\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1$, exempelvis genom geometrisk summa)

Om X istället är antalet kast till och med n:te gången vi får en sexa?

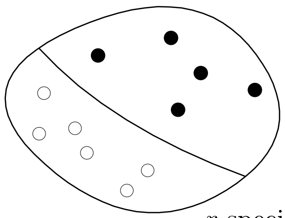
$$\begin{aligned} p_X(k) = P(X = k) &= \{k = n, n+1, \ldots\} \\ &= \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Detta är en negativ binomialfördelning(n, p).

Repetition

$$Y \sim \mathrm{bin}(n, p) \quad P_Y = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, \ldots, n$$

Exempel – plocka utan återläggning



Figur. Mängddiagram med n element totalt. Delmängder med r "speciella" element, $n - r$ "icke–speciella".

Dra m element utan återläggning. $Y =$ Antalet dragna som är speciella och

$$p_Y(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{m-k}}{\binom{n}{m}}, \quad 0 \leq k \leq r, \quad 0 \leq m - k \leq n - r$$

som kallas en hypergeometrisk fördelning. Om m litet relativt n och r så beter sig denna approximativt som en binomialfördelning.

Binomialfördelning

$$X_n \sim \mathrm{bin}(n, p_n) \quad \text{där} \quad n\, p_n = \lambda \Longleftrightarrow p_n = \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda \text{ godtyckligt positivt tal } (n \geq \lambda)$$

Om n stor, $n \geq k$ med k fixt, så

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

notera att med $(n)_k = n\,(n-1)\cdots(n-k+1)$ så kommer

$$\frac{(n)_k}{n_k} \longrightarrow 1 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty$$

och

$$\frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1^k} \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty$$

vilket leder till att

$$P(X_n = k) \longrightarrow \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

binomialfördelning går alltså mot en normalfördelning när $n \longrightarrow \infty$.

Använding för ovanstående slutsats?

$X \sim \mathrm{bin}(n, p)$ och om n stort och p litet så fungerar approximationen

$$p_X(k) \approx \frac{(n\,p)^k \mathrm{e}^{-np}}{k!} = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda > 0$$

bra för små k relativt n.

4.2 Reella SV

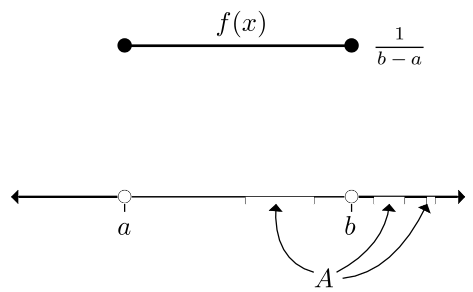
X har en kontinuerlig sannolikhetsfördelning om

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_X(x) \geq 0, \quad A \subseteq R, \quad \underbrace{\int_R f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1}_{\text{sannolikhetstäthet}}$$

Ska titta på

- Likformig fördelning på $[a, b]$, $\quad a < b$
- Binomialfördelning (λ), $\quad \lambda > 0$
- Normalfördelning(μ, σ^2), $\quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+$

4.2.1 Likformig fördelning



Figur. Graf med puls med area 1, "komplex" (komplicerad) mängd.

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A \cap [a,b]} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\text{längden}(A \cap [a, b])}{\text{längden}([a, b])}$$

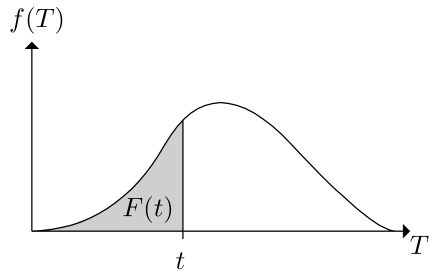
Fördelningsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Hänger ihop med frekvensfunktion genom derivata, $F'(x) = f(x)$, förutsatt kontinuerlig SV.

4.2.2 Exponentiell fördelning

$T =$ livslängden för en teknisk apparat, $T \geq 0$. $P(T \leq t)$?



Figur. Graf med $f(t)$ mot tid med $F(t)$ till t inritat.

"Teknisk apparat som ny!" – vi bortser från allt åldrande:

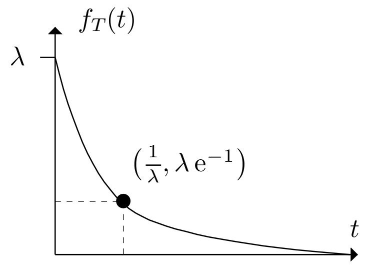
$$P(T \geq t + s | T \geq s) = P(T \geq t)$$

skulle kräva

$$P(T \geq t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Vi har

$$F_T = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f_T(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_T(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$



Figur. Graf över $f_T(t)$ med start i λ och punkten $\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\, \mathrm{e}^{-1}\right)$ inritad.

Γ-fördelning(α, λ)

$$f(t) = \frac{x^\alpha\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda > 0, \quad t \geq 0, \qquad \underbrace{\alpha \geq 0}_{\text{formparameter}}$$

om $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ så $\Gamma(\alpha) = (n-1)!$

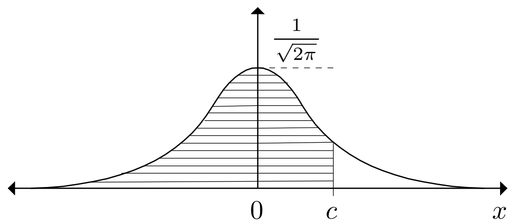
Titta på normalfördelning själva innan övning.

5 Föreläsning 5 22 april 2015

5.1 Normalfördelning$(\mu, \sigma^2) = N(\mu, \sigma^2)$

μ väntevärde, σ^2 varians.

N(0,1):



Figur. Graf över $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ med $F(x)$ inritad till ett x. Max i $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, inritat.

Definition

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = \varphi(x),$$

är pdf ty

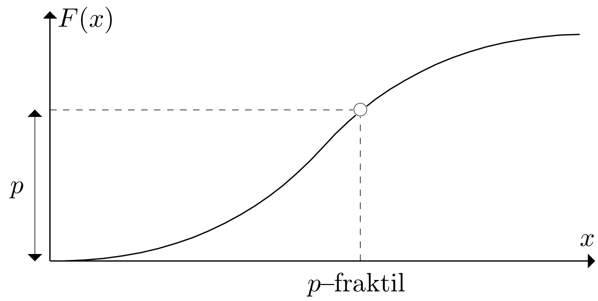
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 1,$$

och dess cdf är

$$F_{N(0,1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u = \Phi(x).$$

Några viktiga värden för $\Phi(x)$				
$\Phi(0)$	$=$	$\frac{1}{2}$	p.g.a. symmetri	
$\Phi(1)$	$\approx$	85%		
$\Phi(-1)$	$\approx$	15%		
$\Phi(c)$	$=$	0.975	$\Longrightarrow$	$c = 1.96$
$\Phi(c)$	$=$	0.95	$\Longrightarrow$	$c = 1.65$
$\Phi(c)$	$=$	0.995	$\Longrightarrow$	$c = 2.58$

5.1.1 p-fraktilen — även quantile, fractile och percentiler



Figur. Graf av cdf upp till 1. p en proportion av $0 - 1$ markerat på y-axel, med linje längs $y = p$ till $F(x)$ och sen ner till p–fraktil.

5.1.2 Generell normalfördelning från $N(0,1)$

Antag X en $N(0,1)$-variabel. Ansätt $Y = a + b\,X \quad a,b \in \mathbb{R} \quad b > 0$, då fås cdf

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + b\,X \leq y) = P\Big(X \leq \frac{y-a}{b}\Big) = \Phi\Big(\frac{y-a}{b}\Big)$$

och pdf

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,\Phi\Big(\frac{y-a}{b}\Big) = \varphi\Big(\frac{y-a}{b}\Big)\,\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a}{b}\right)^2}\Big(= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\Big).$$

Så vi har

$$N(\mu,\sigma^2)\underbrace{\sim}_{\text{täthet}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad \text{och omvänt} \quad Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Not kring kontinuerliga och diskreta fördelningar

Kan gå från kontinuerlig till diskret genom en SV, måste vara vaksam.

$$Y = \begin{cases} 0 & X \leq x \\ 1 & X > x \end{cases}$$

$X \sim N(0,1), \quad Y = |X-1|, \quad f_Y(y) = ?$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X-1| \leq y) = P(1-y \leq X \leq 1+y) = \Phi(1+y) - \Phi(1-y)$$

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,F_Y(y) = \Phi(1+y) - \Phi(1-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(1+y)^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(1-y)^2}{2}}$$

5.2 Två och n-dimensionella SV

$$X = \text{summan av två tärningar}, \quad Y = \text{maximala poängen hos två tärningar}$$

$$p_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x, Y = y) \qquad (x,y) \in \Omega_{(X,Y)} = \{\text{möjliga utfall på } (x,y)\}$$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{36} \quad (x,y) = (2,1) \\ &= \frac{2}{36} \quad (x,y) = (3,2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Omega_{(X,Y)} = \{(2,1),(3,2),(4,2),(4,3),(5,3),(5,4),(7,4),(7,5),\ldots,(12,6)\}$$

$$p_{(X,Y)}(x,y) = 0 \quad \text{om } (x,y) \in \Omega_{(X,Y)} \text{ men } (x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$$

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y p_{(X,Y)}(x,y), \quad y \in \Omega_Y$$

$$P_Y(y) = \sum_x p_{(X,Y)} = (x,y), \quad x \in \Omega_X$$

$$\text{Om } (X = x) \text{ och } (Y = y) \text{ oberoende} \Longrightarrow p_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y).$$

Definition

Om X och Y har sannolikhetsfunktion $p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y)$ så sägs X och Y vara oberoende.

eller ekvivalent

X,Y oberoende omm $P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\,P(Y\in B)$ för alla händelser A och B "snälla" delmängder av $\mathbb{R}$.

5.2.1 (X,Y) tvådimensionell kontinuerlig SV

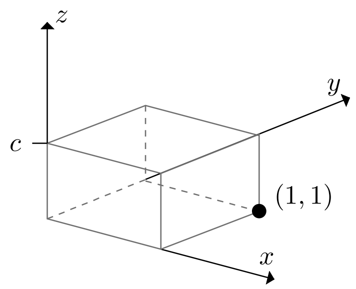
Sannolikhetstäthet $f_{(X,Y)} \geq 0$,

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y) = 1$$

Exempel

Tvådimensionell täthet som svarar mot likformigt val av punkt i enhetskvadraten $\{(x,y)\colon 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ och 0 utanför.



Figur. Figur med enhetskvadrat i x-y plan som bas och med en höjd c.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1\,c \quad\Longrightarrow\quad c = 1.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y = \{\text{i exemplet}\} = 1, \quad 0\leq x\leq 1$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \{\text{i exemplet}\} = f_X(x)\,f_Y(y).$$

Matematiken bakom

Tvådimensionell fördelningsfunktion

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y) = \begin{cases} \sum_{(u,v)} p_{(X,Y)}(u,v) & u\leq x, v\leq y \\ \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{(X,Y)}(x,y) = f_{(X,Y)}(u,v)$$

Med oberoende

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y).$$

6 Föreläsning 6 27 april 2015

6.1 Tvådimensionell SV

(X, Y) har en täthet $f(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Om A är en liten omgivning till (x, y) så

$$P((X, Y) \in A) \approx \text{arean av A} \times f(x, y).$$

Tätheten för X: $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$

Tätheten för Y: $\quad f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$

6.1.1 Oberoende

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\,P(Y \in B) \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ och } Y \text{ oberoende}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x, y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

x avbildat på $f_{(X|Y)}(x|y)$, den betingade sannolikhetstätheten för X givet att $Y = y$

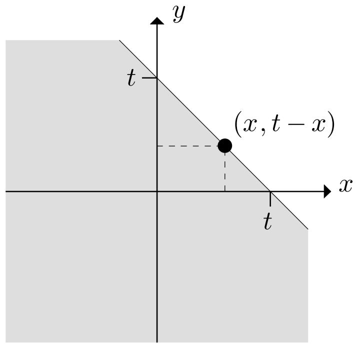
$$\approx \; P(X = x \pm \varepsilon | Y = y \pm \varepsilon).$$

Definition

$$f_{(X|Y)}(x|y) \triangleq \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \{\text{oberoende}\} = \frac{f_X(x)\,f_Y(y)}{f_Y(y)}.$$

6.1.2 Fördelning för $X + Y$?

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(t) \triangleq P(X + Y \leq t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= f_{X+Y}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{X+Y}(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{t-x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot f(x, t - x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$



Figur. $F_{X+Y}(t) \triangleq P(X + Y \leq t)$

Specifikt om X och Y oberoende så fås faltning

$$f_{X+Y}(t) = f_X * f_Y(t).$$

Exempel $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ oberoende

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_X(y) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{=0, x<0} \underbrace{f(t-x)}_{=0, x>t} \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\,\mathrm{d}x & t \geq 0 \end{cases}$$

det senare är en Γ-täthet $(\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\, t)$, $\Gamma(2, \lambda)$.

För heltal

Givet att (X, Y) har sannolikhetsfunktion $P(x, y)$ för $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ så

$$P_{X+Y}(z) = \sum_x p(x, z-x) = \{\text{oberoende}\} = \sum_x p(x)\, p(z-x),$$

om både X och $Y \geq 0$ så

$$P_{X+Y}(z) = \sum_{x=0}^{z} p(x)\, p(z-x), \quad z = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$X \sim \mathrm{poisson}(\lambda_1) \text{ och } Y \sim \mathrm{poisson}(\lambda_2) \text{ oberende } \quad \Longrightarrow \quad X + Y \sim \mathrm{poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$X \sim \mathrm{bin}(n, p) \quad Y \sim \mathrm{bin}(m, p)$$

$$\text{oberoende} \quad \Longrightarrow \quad X + Y \sim \mathrm{bin}(n+m, p)$$

Rekursiv intuition

$$P(X \in A, Y \in B, Z \in C) = P(X \in A)\, P(Y \in B)\, P(Z \in C)$$

$$p(x, y, z) = p_X(x)\, p_Y(y)\, p_Z(z)$$

$$f(x, y, z) = f_X(x)\, f_Y(y)\, f_Z(z).$$

Om $X_1, \ldots, X_n$ oberoende och alla har fördelningsfunktion F,

$$P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leqslant x, \ldots, X_n \leqslant x) = \{\text{oberoende}\}$$

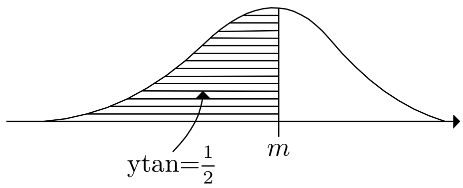
$$= P(X_1) \cdots P(X_n \leq x) = F(x)^n$$

$$f_{\max}(X_1, \ldots, X_n) = n\, F(x)^{n-1}\, f(x).$$

För minimum

$$F_{\min(X_1, \ldots, X_n)}(x) = 1 - (1 - F(x))^n \quad \Longrightarrow \quad f_{\min(X_1, \ldots, X_n)}(x) = n\, f(x)\, (1 - F(x))^{n-1}.$$

6.2 Teoretisk median



Figur. Graf illustrerande teoretisk median, värdet m som delar fördelningen i två delar med samma area.

Givet $f(x)$ sannolikhetstäthet för X så definieras m, den teoretiska medianen, som

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{m} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Den teoretiska medianen m uppfyller alltså

$$\begin{aligned} P(X \geq m) &= \frac{1}{2} \\ P(X \leq m) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.2.1 Väntevärdet $\boldsymbol{\mu = E[X]}$

$$\mu = E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{om} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\,\mathrm{d}x < \infty\right)$$

och i diskret fall

$$\sum_{x \in \Omega_X} x\, p_X(x) \quad \left(\text{om} \sum_{x \in \Omega_X} |x|\, p_X(x) < \infty\right)$$

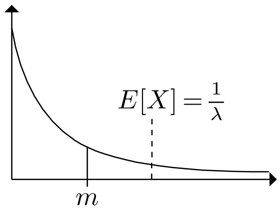
Exempel Exponentialfördelning

$X \sim \exp(\lambda)$

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ F(m) = \frac{1}{2} &\Longrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$

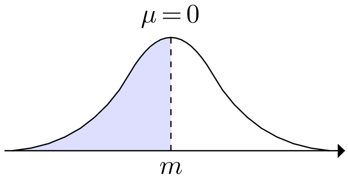
$$\int f g = F g - \int F g'$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} x\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$



Figur. Exponentialfördelning $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ med area upp till m. $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ inritat.

Exempel Gaussfördelning



Figur. Symmetrisk och m i symmetrilinje $\mu = 0$.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\,\lambda^x\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} = \lambda \underbrace{\left(\frac{\lambda^{x-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{(x-1)!} \right)}_{=1}$$

Givet $Y = g(X)$ och X har täthet $f(x)$,

Sats

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{om} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \right)$$

$$E[Y] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)\,p_X(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{om} \sum_{x \in \Omega_X} |g(x)|\,f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \right)$$

Exempel

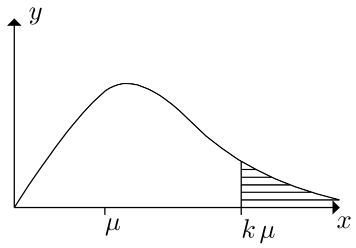
$X =$ poäng 1 tärningskast, $Y = X^2$

$$\Omega_Y = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\} \quad \frac{1}{6} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot 36 = E[Y] = 3.5$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{6} i^2\,\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{om utfallet jämnt} \\ 0 & \text{om utfallet udda} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ jämn} \\ 0 & \text{om } x \text{ ojämn} \end{cases}$$

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Figur. Figur illustrerande Markovs olikhet.

Markovs olikhet

$$P(X \geq k\,\mu) \leq \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_0^\infty x\,f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_0^{k\mu} x\,f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{k\mu}^\infty (k\,\mu)\,f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq k\,\mu\,P(X \geq k\,\mu)
\end{aligned}$$

6.2.2 Varians

$$\sigma^2 = \text{variansen för } X = \mathrm{Var}[x] \triangleq E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

6.2.3 Standardavvikelse

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \text{ standardavvikelse för } X$$

Not Markov på varians ger Chebyshevs olikhet.

7 Föreläsning 7 $\boxed{\textsf{extrainsatt}}$ 29 april 2015

7.1 Mått för stokastiska variabler?

7.1.1 Väntevärden och varians

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \mu_X = \mu$$

$$E[X] = \sum_{z \in \Omega_X} x\, p_X(x)$$

Sats

$$Y = g(X) \in \mathbb{R} \qquad E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Givet

$$z = g(X, Y) \quad (X, Y) \sim \text{tvådimensionell SV med täthet } f(x, y)$$

Sats

$$E[z] = \int\int_{\mathbb{R}} g(x, y)\, f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Följdsats – Summa för SV

X, Y tvådimensionella (kontinuerliga) SV $\quad Z = a + b\,X + c\,Y$

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int (a + b\,X + c\,Y)\, f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int\int_{\mathbb{R}^2} a\, f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\int_{\mathbb{R}^2} b\,x\, f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int\int_{\mathbb{R}^2} c\,y\, f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= a + b\,E[X] + c\,E[Y] \end{aligned}$$

Kan nu visa (från förra gången), $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] \triangleq E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

"Steiners sats"

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 + E[X]^2 - 2\,E[X]X] \\ &= E[X^2] + (E[X])^2 - 2\,E[X]\,E[X] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned} \qquad \square$$

Från förra gången

$Z =$ poäng i ett tärningskast $\quad E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} \quad E[Z^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{6}$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

Givet X och Y är *oberoende* kontinuerliga tätheter f_X och $f_Y \Longrightarrow f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

Sats

$$E[X\,Y] = E[X]\,E[Y]$$

Bevis

$$\begin{aligned} E[X\,Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= E[X]\,E[Y] \end{aligned} \qquad \square$$

Följdsats

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$$

Bevis

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X+Y] &= E[(X+Y)^2] - (E[X+Y])^2 \\ & E[X^2 + Y^2 + 2\,X\,Y] - (E[X] + E[Y])^2 \\ & (E[X^2] + E[Y^2] + 2\,E[X\,Y]) - (E[X]^2 + E[Y]^2 + 2\,E[X]\,E[Y]) \\ & \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\,(E[X\,Y] - E[X]\,E[Y]) \\ & \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \end{aligned} \qquad \square$$

Generalisering

$$E[X\,Y] - E[X]\,E[Y] \;=\; E[(X - E[X])\,(Y - E[Y])] \triangleq \text{kovariansen mellan/av } X \text{ och } Y.$$

Positiv om hög→hög och låg→låg, negativ om hög→låg och låg→hög.

$$\mathrm{Var}[a + b\,X] = b^2\,\mathrm{Var}[X]$$

7.1.2 Kovarians

$$\mathrm{Kov}[X,X] = \mathrm{Var}[X]$$

$$\mathrm{Kov}[a + b_1 X_1 + \cdots + b_n\,X_n,\; c + d_1\,Y_1 + \cdots + d_m\,Y_m] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i\,d_j\,\mathrm{Kov}(X_i, Y_j) \qquad \left(= \boldsymbol{b}^2 \underbrace{C_{n,m}}_{\sigma_i^2 \text{ på diag}} \boldsymbol{d}\right).$$

Specialfall

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[a + b_1 X_1 + \cdots + b_n\,X_n] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i\,b_j\,\mathrm{Kov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2\,\mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} b_i\,b_j\,\mathrm{Kon}[X_i, X_j]. \end{aligned}$$

7.2 Mått för specifika fördelningar

En likformig fördelning

$$U \sim \text{likformigt fördelad på } [0,1]$$

Väntevärde

$$E[U] = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f_U(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u\,1\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Varians

$$\operatorname{Var}[U] = E[U^2] - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 u^2\,1\,\mathrm{d}u - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Standardavvikelse

$$E\left[\left|U - \frac{1}{2}\right|\right] = \frac{1}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}} = \sqrt{E[(I - E[U])^2]} > \frac{1}{4}$$

och mer generellt

$$E[|U - E[U]|]^2 \leq \operatorname{Var}[U - E[U]].$$

$$Z \sim \mathrm{Likf}[a, b]$$

Konvertering till $[0, 1]$

$$\frac{Z - a}{b - a}, \quad \frac{E[Z] - a}{b - a} = 2 \quad \Longrightarrow \quad E[Z] = \frac{a + b}{2}$$

$$\frac{\operatorname{Var}[Z] - a}{b - a} = \frac{1}{12}$$

7.2.1 Normalfördelning

$X \sim N(0, 1)$

Väntevärde

$$E[X] = 0$$

Varians

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad X \sim N[\mu, \sigma^2]$$

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \implies \begin{array}{l} \dfrac{E[X] - \mu}{\sigma} = 0 \\ \dfrac{\operatorname{Var}[X]}{\sigma^2} = 1 \end{array}$$

7.2.2 Exponentialfördelning

$Y \sim \text{Expf}(\lambda)$

Väntevärde

$$E[Y] = \int_0^\infty y\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

Varians

$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y = \ldots = \ldots = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \qquad (= E[Y])$$

7.2.3 Γ–fördelning

$Z \sim \Gamma$–fördelning(n, λ)

$$Z = Y_1 + \cdots + Y_n, \quad \text{oberoende expf}[\lambda]$$

Väntevärde

$$E[Z] = E[Y_1] + \cdots + E[Y_n] = n\,\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$$

Varians

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Y_1] + \cdots + \text{Var}[Y_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}$$

Medelvärden

$$E\left[\frac{Z}{n}\right] = \frac{E[Z]}{n} = \frac{n \cdot \frac{1}{\lambda}}{n} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}\left[\frac{Z}{n}\right] = \frac{\text{Var}[Z]}{n^2} = \frac{n \cdot \frac{1}{\lambda^2}}{n^2} = \frac{1}{\lambda^2\,n}$$

$X_1, \ldots, X_n$ oberoende $E[X_i] = \mu$ och $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$

$$E[\overline{X}] = \mu$$

$$\sqrt{\text{Var}[\overline{X}]} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

7.2.4 Poissonfördelning

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Väntevärde

$$E[X] = \lambda$$

Varians

$$\mathrm{Var}[X] = \lambda$$

Standardavvikelser

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$\boxed{\text{Svårsmält slutkaos!}}$

7.2.5 Binomialfördelning

Genom summor.

Väntevärde

$$n\,p$$

Varians

$$n\,p\,(1-p)$$

7.2.6 Multinomialfördelning

På likartat sätt

$X_1, \ldots, X_k \sim \mathrm{Multinomial}(n, p_1, \ldots, p_k)$

Kovarians

$$X_i + X_j \sim \mathrm{Bin}(n, p_i + p_j)$$

$$\mathrm{Kov}[X_i, X_j] = -n\,p_i\,p_j$$

8 Föreläsning 8 4 maj 2015

- Betingade väntevärden och variabler
- Momentgenererande funktioner
- Approximation av väntevärden och varianser
- Stora talens lag
- Centrala gränsvärdessatsen

8.1 Repetition

$$f_{(X|Y)}(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

För väntevärden gäller att

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{(X|Y)}(x|y)\,\mathrm{d}x = \{\text{säg}\} = g(y) \quad (\text{SV}).$$

$$g(Y) = E[X|Y].$$

Det existerar räknelag som säger att

$$E[X] = E[E[X|Y]].$$

För varians gäller att

$$\mathrm{Var}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X|Y=y])^2\, f_{(X|Y)}(x|y)\,\mathrm{d}x = h(y)$$

$$h(Y) = \mathrm{Var}[X|Y].$$

Det existerar räknelag som säger att

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[E[X|Y]] + E[\mathrm{Var}[X|Y]].$$

8.2 Momentgenererande funktioner

Momentgenererande funktioner definieras

$$M_X(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x = E[\mathrm{e}^{tX}] & \text{om kontinuerlig} \\ \sum_{x\in\Omega_X} \mathrm{e}^{tx} p_X(x) & \text{om diskret,} \end{cases}$$

$$\text{där} \quad M_X(t) < \infty \text{ i öppet intervall kring } 0.$$

Om $M_X(t) = M_{X'}(t)$ för t i öppet intervall kring 0 $\implies$ X och X' har samma fördelning.

Kan kasta om integrering och derivata

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_X(t)\right]_{t=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\, \mathrm{e}^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = E[X]$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} M_X(t)\right]_{t=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = E[X^2]$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} M_X(t)\right]_{t=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, \mathrm{d}x = E[X^n].$$

Exempel Normalfördelning

Givet $Z \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned} E[\mathrm{e}^{tZ}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, \mathrm{d}z \\ &= \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-z)^2}{2}}\, \mathrm{d}z}_{=1} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

$$E[z] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{2t}{2}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0} = 0$$

$$E[z] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right)\right]_{t=0} = \left[\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} + t^2\, \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0} = 1$$

Givet $Y = a + b\,X$

$$m_Y(t) = E\left[\mathrm{e}^{(a+\mathrm{b}\mathrm{X})t}\right] = \mathrm{e}^{at} E[\mathrm{e}^{btX}] = \mathrm{e}^{at} M_X(b\,t).$$

Givet $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ så har X samma fördelning som $Y = \mu + \sigma Z$, $\quad Z \sim N(0,1)$

$$M_X(t) = M_Y(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\, \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2 t}{2}}.$$

$$\begin{aligned} X \sim \mathrm{Bin}(1,p) &= (1-p)\,\mathrm{e}^{t0} + p\,\mathrm{e}^{t1} \\ &= (1-p) + p\,\mathrm{e}^{t} \end{aligned}$$

Om $Y = X_1, \ldots, X_n \quad X_i$ oberoende $\mathrm{Bin}(1,p)$ så $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

Sats

Om X och Y oberoende SV så är

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{(X+Y)t}\right] = M_X(t)\, M_Y(t) \\ &= E[\mathrm{e}^{tX}\, \mathrm{e}^{tY}]. \end{aligned}$$

Givet $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,

$$\begin{aligned} E[\mathrm{e}^{tX}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^t \lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \\ \{\text{Taylor}\} &= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t \lambda} \quad = \quad \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}. \end{aligned}$$

Sista minutens svammel™

$Y = g(X), \quad \mu = E[X], \quad \sigma^2 = \text{Var}[X]$ <u>liten</u>

$$Y = g(\mu + (X - \mu)) \approx \{\text{1:a ordnings Taylor}\} \approx g(\mu) + (X - \mu)\, g'(\mu)$$

$$E[Y] \approx g(\mu) \qquad \text{Var}[Y] \approx g'(\mu)^2\, \text{Var}[X].$$

8.3 Stora talens lag

8.3.1 Repetition

Y stokastisk variabel med $E[Y] = \mu$ och $\text{Var}[Y] = \sigma^2$

Chebychevs olikhet

$$P(|Y - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$[\text{ty Markov på } P((Y - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2)]$$

8.3.2 Stora talens lag

Sats

Om $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ är oberoende med samma fördelning och $E(X_i) = \mu$ existerar så konvergerar

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \bar{x}_n$$

mot μ i meningen att $\forall \varepsilon > 0$ gäller att

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \varepsilon) \longrightarrow 1 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty$$

$$(\Longleftrightarrow \quad P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty)$$

Bevis

Vi antar här att $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$.

$$E[\overline{X}_n] = \mu$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2}\Bigg(\underbrace{\text{Var}[X_1]}_{\sigma^2} + \cdots + \underbrace{\text{Var}[X_n]}_{\sigma^2}\Bigg) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = P\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \left(\frac{\omega\sqrt{n}}{\sigma}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \longrightarrow 0 \qquad \square$$

Specialfall

$X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$\underbrace{\frac{X}{n}}_{\text{relativ frekvens}} \quad \text{konvergerar i sannolikhet mot} \quad p.$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\frac{X}{\lambda} \quad \text{konvergerar i sannolikhet mot} \quad 1 \quad \text{när} \quad \lambda \longrightarrow \infty.$$

X och Y oberoende och $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $X \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, då är

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)\, M_Y(t) \\ &= \left(e^{\mu_X t}\, e^{\frac{\sigma_X^2}{2}}\right)\left(e^{\mu_Y t}\, e^{\frac{\sigma_Y^2}{2}}\right) \\ &= e^{(\mu_X + \mu_Y)t}\, e^{\frac{(\sigma_X^2 + \sigma_X^2)t^2}{2}} \end{aligned}$$

Givet X_i oberoende $N(\mu, \sigma^2)$ [ska snart visa att det kravet inte behövs!] så

$$\sqrt{n}\, \frac{\sum_{i=0}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

8.3.3 Centrala gränsvärdessatsen

Sats

Givet $X_1, X_2, \ldots$ oberoende likafördelade $E[X_i] = \mu$ och $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ så gäller

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq x\right) \longrightarrow F_{N[0,1]}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \leq x\right)$$

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} \approx N(0,1) \quad \text{om } n \text{ stort.}$$

Handviftande bevis

$$M_{\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}(t) \longrightarrow e^{\frac{t^2}{2}}, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n} X_i - \mu/n}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma}}_{T_i}$$

Taylor

$$M_X(t) = 1 + \mu\, t + \frac{E[X^2]}{2}\, t^2 + R$$

$$M_{Y_i}(t) = 1 + \frac{t^2}{n} + R$$

Slutsats

$$\left(1 + \frac{t^2}{n} + R\right)^n \quad \longrightarrow \quad \mathrm{e}^{t^2/2}$$

($\square$)

9 Föreläsning 9 6 maj 2015

9.1 Repetition

$X_1, \ldots, X_n, \ldots$ oberoende och likfördelade med $E[X_i] = \mu$ och $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$$P\left(\frac{(X_1 + \cdots + X_n)}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$$

$X_1, \ldots, X_n$ är approximativt $N(n\,\mu; \sigma^2\, n)$.

$$\mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = n\,\mathrm{Var}[X_i] = n\,\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

20 tärningskast $S_{20} =$ summan av dem

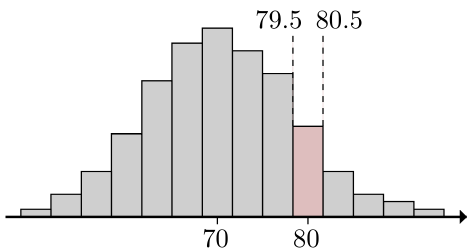
$$E[\text{ett kast}] = 3.5$$

$$\mathrm{Var}[\text{ett kast}] = \frac{91}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

S_{20} approximativt $N\left(70; \frac{35}{12} \cdot 20\right)$

$$\sqrt{20}\,\sigma \approx 7.64$$

9.1.1 Halvtalskorrektion



Figur. Normalfördelade staplar centrerad i 70 med 80 inringat. Halvtalskorrigeringens area mellan 79.5-80.5 inritat.

$$P(S_{20} > 80) = 1 - P(S_{20} \le 80) \approx 1 - \Phi\left(\frac{80 - 70}{7.64}\right)$$

$$P(S_{20} \ge 80) = 1 - P(S_{20} \le 80) \approx 1 - \Phi\left(\frac{79 - 70}{7.64}\right)$$

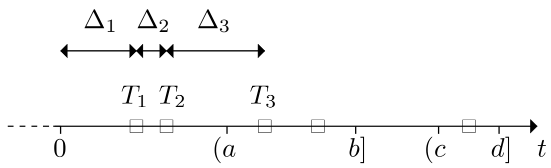
$$P(S_{20} > 80) = 1 - P(S_{20} \le 80) \approx 1 - \Phi\left(\frac{80 + 0.5 - 70}{7.64}\right)$$

$$P(S_{20} \ge 80) = 1 - P(S_{20} \le 80) \approx 1 - \Phi\left(\frac{79 - 0.5 - 70}{7.64}\right)$$

$$P(S_{20} = 80) = \Phi\left(\frac{80 + 0.5 - 70}{7.64}\right) - \Phi\left(\frac{79 - 0.5 - 70}{7.64}\right)$$

Ok för tillräckligt stora summor. Tumregel för binomialfördelning, $n\,p\,(1-p) \ge 5$.

9.2 Poissonprocesser



Figur. Poissonprocess

$$N(t) = \text{antalet pulser i intervallet } (0, t] \sim \text{Poisson}(t\,c), \quad c \text{ intensitetsparameter}$$

$$N((a, b]) = N(b) - N(a) = \text{antalet pulser i intervallet } (a, b] \sim \text{Poisson}((b-a)\,c) \quad (a < b)$$

Om $(a, b] \cap (c, d] = \phi$, så är $N((a, b])$ och $N((c, d])$ oberoende.

En poissonprocess karaktäriseras av att A_1, A_2, A_3, ... = T_1, $T_2 - T_1$, $T_3 - T_2$, ... är en föjld av oberoende expf(c). $E[\Delta_i] = \frac{1}{c}$.

9.2.1 Beteckningskrock

$$\text{Expf}(\lambda) \quad \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\text{Expf}(c)$$

$$N(t) \sim \text{Poisson}(c\,t = \lambda)$$

9.2.2 Not

$$T_n \sim \Gamma\text{–fördelad}(n, c)$$

$$n \text{ formparameter, } c \text{ ini. parameter}$$

$$P(N(t) \le k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(c\,t)^j\,\mathrm{e}^{-ct}}{j!} = P(T_{k+1} > t)$$

9.3 Simuleringar

Startar med $U_1, U_2, \ldots$; en följd av oberoende Likf([0, 1])–variabel.

$$f_{U_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$F_{U_i}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Givet $X \sim \mathrm{Expf}(\lambda)$, kan vi få likformig?

$$U = F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda X}$$

$$\begin{aligned} P(1 - \mathrm{e}^{-\lambda X} \leq u) &= P(\mathrm{e}^{-\lambda X} \geq 1 - u) \\ &= P(-\lambda X \geq \ln(1-u)) \\ &= P\left(X \leq -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{-\ln(1-u)}{\lambda}\right)} \\ &= u \end{aligned}$$

Generellt

$$X \sim F(x) \quad \Longrightarrow \quad F(X) \sim \mathrm{Likf}[0,1] \quad \underline{\text{om } X \text{ kontinuerlig}}.$$

Kan gå åt andra hållet

$$F(X) = U$$

$$F^{-1}(F(X)) = X = F^{-1}(U).$$

Normalfördelning?

$$\Phi^{-1}(U) \sim N(0,1)$$

Tidigare användes två likformiga variabler för att framställa tvådimensionell fördelning genom polära koordinater. Givet X, Y oberoende $N(0,1)$

$$R^2 = X^2 + Y^2 \sim \mathrm{Expf}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\theta = \mathrm{Likf}(0, 2\,\pi)$$

$$R^2 = U_1 \longrightarrow \mathrm{Expf}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Theta = U_2 \longrightarrow \mathrm{Likf}[0, 2\pi]$$

$$\left(\sqrt{R^2}\cos\theta, \sqrt{R^2}\sin\theta\right),$$

två normalfördelade variabler!

9.3.1 Monte Carlo – simuleringar

$Z_1, \ldots, Z_n$ oberoende $N(0,1)$

$$Y = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2\text{–fördelad}(n) \quad \longleftarrow \left(\text{släkt med } \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Kan dela upp fördelningen med koordinatbyte så en axel blir längs diagonal.

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{(en variabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 \sim \chi^2\text{–fördelad}(n-1) \quad (n-1 \text{ variabler})$$

$$(\text{stickprovsvarians } (n-1)S_z^2)$$

10 Föreläsning 10 11 maj 2015

10.1 χ^2–fördelning

Givet $Z_1, ..., Z_n$ oberoende $N(0,1)$ så är

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2\text{–fördelning}(n).$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2}_{\triangleq (n-1)S_Z^2} \sim \chi^2\text{–fördelad}(n-1)$$

Där

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2$$

kallas för stickprovsvariansen för $Z_1, ..., Z_n$,

$$f_{Z_1,...,Z_n}(Z_1, ..., Z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\sum Z_i^2)}.$$

10.2 Student's t–fördelning

Om U och V är oberoende, $U \sim N(0,1)$ och $V \sim \chi^2(r)$, då sägs

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{r}}}$$

vara (Student's) t–fördelad(r).

Påstående

Om $X_1, ..., X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$ så är

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S_X} \sim t\text{–fördelad}(n-1).$$

Bevis

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}}{S_Z} \sim t\text{–fördelad}(n-1)$$

ty

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}}{S_Z} = \frac{\sqrt{n}\,\overline{Z}}{\sqrt{\frac{(n-1)\,S_Z^2}{n-1}}} \begin{array}{l} \longleftarrow N(0,1) \\ \longleftarrow \chi^2(n-1) \end{array}.$$

Om $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ oberoende $N(0,1) \implies \overline{Z} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$.

$$\begin{aligned} S_Z^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right)^2}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2 (n-1)} \\ &= \frac{S_X^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

$$\implies \sqrt{n}\,\frac{\overline{Z}}{S_Z} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{\sigma^2}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S_X^2} \sim t\text{–fördelad}(n-1).$$

500 häftstiftkast, 128 spets nedåt

$$p = P(\text{spets nedåt i enskilt kast}) = \frac{128}{500} = 25.6\% \quad \longleftarrow \text{observerad relativ frekvens}$$

Innan:

$$X = \text{antal stift med spets nedåt} \sim \text{Bin}(n, p), \quad p \text{ okänd}$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \text{(teoretisk) relativ frekvens}$$

$\hat{p}$ är en punktskattning av p

Om p riktiga parametern så är

$$E[\hat{p}] = E_p[\hat{p}] = E_p\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{n\,p}{n} = p,$$

$$\text{Var}[\hat{p}] \quad (= E[(\hat{p} - p)^2]) \quad = \frac{1}{n^2}\,\text{Var}[X] = \frac{p\,(1-p)}{n}$$

$$\sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = \text{standardfelet (teoretiskt)} = \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

(definition om punktskattningen är väntevärdesriktig)

10.3 Skattade standardfel

$$\sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{X}{n}\left(1 - \frac{X}{n}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{X\,(n-X)}{n^3}}$$

$X_1, ..., X_n$ oberoende Expf(λ), λ okänd. Hur skatta λ?

10.4 Momentmetoden

Momentmetoden säger att vi skall använda ekvationssystemet

$$\underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right)}_{\text{(empiriskt förstamoment)}} = \overline{X} = E_X[X_i] = \frac{1}{\lambda}$$

och lös detta

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

$X_1, ..., X_n$ oberoende $N(\mu; \sigma^2)$, båda okända.

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \overline{X} = E[X_i] = \mu$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)}_{\text{empiriska andramomentet}} = E[X^2] = \mathrm{Var}[X_i] + (E[X_i])^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$\hat{\mu} = \overline{X}$ ärväntevärdesriktig punktskattning av μ. *([sic] $\hat{\mu} = \overline{X}$ wr. p.s. av μ)*

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right) = \frac{(n-1)\,S_X^2}{n}$$

Exempel

$X_1, ..., X_n$ oberoende poissofördelade med parameter λ.

$$p_\lambda(x_1, ..., x_n) = p(x_1, ..., x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{x_i!} \quad L(\lambda; x_1, ..., x_n)$$

Fixera ett tänkt utfall, leta upp λ som maximerar sannolikheten för det utfallet. Kalla detta för

$$\hat{\lambda}(x_1, ..., x_n).$$

Uppskattningen $\hat{\lambda}(x_1, ..., x_n)$ kallas för den teoretiska maximum likelihood–uppskattningen av λ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{x_i}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{x_i!}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\lambda) - n\,\lambda - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)}_{\Rightarrow 0}\right) = \frac{n\,\overline{x}}{\lambda} - n = 0$$

$$\Longrightarrow \hat{\lambda} = \overline{x}.$$

11 Föreläsning 11 13 maj 2015

1. Mer om punktskattningar
2. Konfidensintervall

11.1 ML-skattningar av μ och σ^2 i normalfördelade stickprov

$$X_1, \ldots, X_n \text{ oberoende } X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Hur skatta paret av parametrar om båda är okända?

Hitta $\hat{\mu}$ och $\hat{\sigma}^2$ som maximerar likelihood–funktionen $L(\mu, \sigma^2, X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0 \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2} \text{ ger samma slutresultat}\right) \end{cases}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sigma^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$-n \ln \sigma - \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 \\ -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n} \end{cases}$$

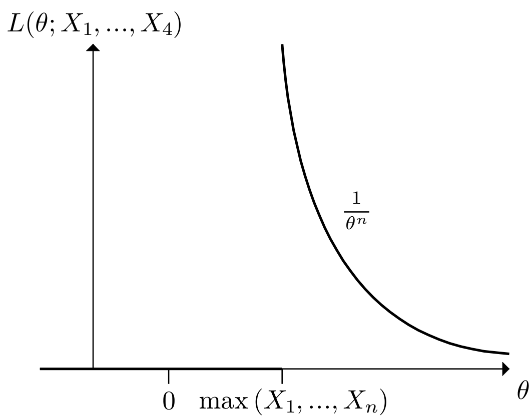
(samma skattning som momentuppskattningar)

Exempel

ML-skattning för ett stickprov på

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & x \ge \theta \end{cases}, \quad \theta > 0,$$

$$L(\theta; X_1, \ldots, X_4) = \prod_{i=0}^{4} f_\theta(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \quad \text{om } \theta \ge \max(X_1, \ldots, X_n).$$



Figur. Likelihoodfunktionen. Maximeras om $\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

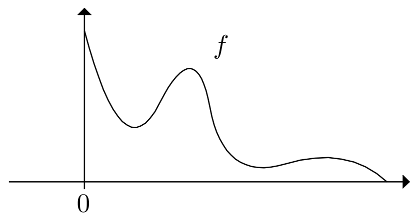
11.2 Filosofidags

11.2.1 Enstickprovsmodeller

$X_1, \ldots, X_n$ oberoende likfördelade där X_i har fördelningsfunktion $F \in \mathcal{F} =$ klass av fördelningsfunktion; kan vara diskreta heltalsvärda fördelningar, kan vara kontinuerliga fördelningar.

$\mathcal{F}$ kan t.ex. vara {positiva förd., väsentligen kont. täthet f.}

Ofta tillägg av tekniskt villkor, typ $\mathrm{Var}_f[X_i] = \sigma_q^2 < \infty$..



Figur. Kontinuerligt f.

$$\mu = \text{väntevärdet} = \int_0^\infty x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \mu(f)$$

$$\begin{aligned} \overline{X} &\quad \text{p.s.} \quad \mu \\ S^2 &\quad \text{p.s.} \quad \sigma^2 \\ m^2, &\quad \int_0^m f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(p.s. = punktskattning)

Ordnat stickprov

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$

$$\hat{m} = \begin{cases} X\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) & n \text{ udda} \\ \frac{X\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + X\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}{2} & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

Om vi känt till fördelningen

Säg expf

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\lambda} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \\ m &= \frac{\ln 2}{\lambda} \\ &\text{o.s.v.} \end{aligned}$$

1. Hittar vi en bra skattning för $\lambda, \hat{\lambda}$. $\left(\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}\right)$

2. $\hat{\mu} = \frac{1}{\lambda^2} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(\overline{X})^2}, \quad \hat{m} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\overline{X}}$

$$\gamma = \mu + 1.65\,\sigma$$

(95%–fraktilen i sannoliketsfördelningen)

$$\hat{\gamma} = \hat{\mu} + 1.65\,\hat{\sigma} \longrightarrow \overline{X} + 1.65\,S$$

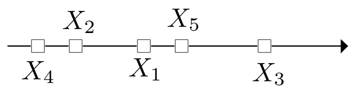
Empirisk fördelning

Lägg $\frac{1}{n}$ i varje observation,

$$\hat{F}(x) = \frac{\text{Antalet}\{i \leq n, X_i \leq X\}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

11.3 Bayesk statistik

$X_1, \ldots, X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$, $\quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \geq 0.$



Figur. X_i placerade längs realaxel.

Skatta

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \overline{X} \approx \mu \\ S^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right) \approx \sigma^2 \end{aligned}$$

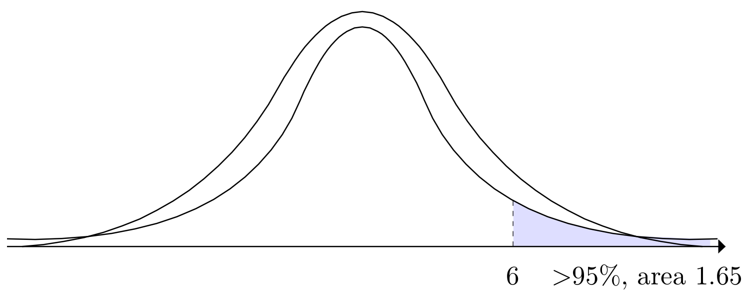
$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim \text{(students) } t\text{–fördelad}(n-1)$$

$n = 7$

$$t\text{–fördelad}(7-1) = t\text{–fördelad}(6)$$

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \leq c\right) \Longleftrightarrow P\left(\mu \geq \overline{X} - \frac{1.9435}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$



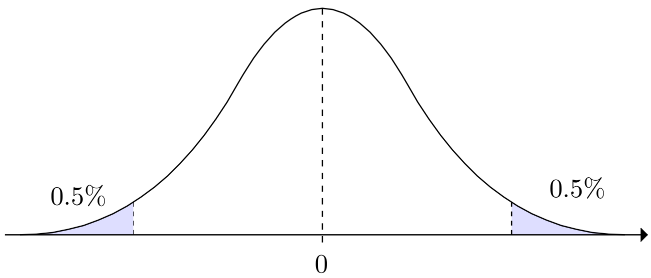
Figur. Två fördelningar, en normalfördelning och en t–fördelning. där t–fördelningen har 95+% markerat och text som säger att den arean är 1.65 för $t(6)$.

$\left[\overline{X} - \frac{1.9435}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ är ett 95% nedåt begränsat konfidensintervall för μ.

Tvåsidigt konfidensintervall

$$P\left(-c \leq \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)}{S} \leq c\right) = F_{t(n-1)}(c) - F_{t(n-1)}(-c) = q$$

$$P\left(\overline{X} - \frac{c\,S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{c\,S}{\sqrt{n}}\right) = q$$



Figur. En t-fördelning centrerad i 0 med $n=7$ och $q=0.99$ där areor 0.5% på vardera sidor är markerade.

Dyrare med tvåsidigt intervall. Dyrare med högre precision.

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{om } \sigma \text{ känt}$$

För stora n kan vi approximera med normalfördelningen. För små n är det viktigt att använda rätt fördelning.

12 Föreläsning 12 18 maj 2015

- Repetition konfidensintervall
- Nya konfidensintervall
- Hypotesprövning

12.1 Repetition för konfidensintervall

$X_1, ..., X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$

Känd varians, söker konfidensintervall för μ.

$$\underset{\text{(pivot)}}{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}} \sim N(0,1)$$

Ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för μ.

$$\underbrace{P\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \geq c\right)}_{1-\Phi(c)=q} = q$$

Ex. $q = 0.95 \Longrightarrow c = -1.65$

$$P\left(\mu \leq \overline{X} - c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = q$$

$$\mu \in \left(-\infty; \overline{X} - c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (q \cdot 100\%)$$

$q = 0.95$

$$\mu \in \left(-\infty; \overline{X} + 1.65\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (95\%)$$

σ okänd:

$$\underset{\text{(pivot)}}{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S}} \sim t\text{–fördelad}(n-1)$$

$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}} \approx N(0,1) \quad \text{när } n \text{ stort (om } n\,p\,(1-p) \text{ stort)}$$

med $\hat{p} = \frac{X}{n}$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx \left\{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{p(1-p)}} \approx 1, \quad n \text{ stort}\right\} \approx \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Exempel

99% symmetriskt konfidensintervall för p. (n stort)

$$P\left(-2.58 \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq 2.58\right) \approx 2\Phi(2.58)-1=0.99$$

$$p=\hat{p} \pm 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad (\approx 99\%)$$

$$p=\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad (\approx 95\%)$$

Standardfelet skalar som rot mot stickprovsstorlek.

Exempel

$X_1, ..., X_n$ oberoende Expf(λ)

För stora stickprov

$$\overline{X} \approx N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\,\lambda^2}\right)$$

$$\frac{\overline{X}-\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\,\lambda^2}}} = \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\frac{1}{\lambda}}{\overline{X}}}_{\text{(pivot)}} \approx N(0,1)$$

Alternativ, exakta metoder

$$2\,\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \sim \chi^2(2n)$$

från Expf($\frac{1}{2}$) $= \chi^2(2)$

Exempel

$X_1, ..., X_n$ oberoende Poisson(λ), n stort

$$\overline{X} \approx N\left(\lambda; \frac{\lambda}{n}\right)$$

$$\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1)$$

Om observerat $\overline{X}=3.5$, $\quad n=20$, $\quad \approx 95\%$ symmetriskt konfidensintervall

$$\lambda=\overline{X} \pm 1.96\sqrt{\frac{\overline{X}}{20}} \quad (\approx 95\%),$$

observerat konfidensintervall

$$\lambda=3.5 \pm 1.96\sqrt{\frac{3.5}{20}} \quad (\approx 95\%).$$

Exempel

$X_1, ..., X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$ och μ okänt. Konfidensintervall för σ^2?

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Undre bägränsning

$$P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \geq c\right) = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(c) = q$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S^2}{c} \qquad (q \cdot 100\%).$$

Exempel

$X_1, ..., X_n$ oberoende $E[X_i]$ existerar och $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ och vi vet σ^2.

$$\underset{\text{(pivot)}}{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}} \approx N(0,1) \quad \text{ty c.gr.v.s}$$

n stort nog, storleksordning 30.

Om σ^2 okänd används $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \approx N(0,1)$, och väldigt stora n krävs.

12.2 Hypotestester

12.2.1 Exempel

Vi misstänker att en tärning är manipulerad så att $p = P(\text{“sexa”}) > \frac{1}{6}$. Vi vill visa att vi har rätt genom att göra ett antal experiment (n) där vi kastar tärningen och räknar antalet sexor.

$$X \sim \text{Bin}(p)$$

Det vi vill motbevisa är att H_0: $p = \frac{1}{6}$ (ev. $p \leq \frac{1}{6}$).

Naturliga beslutsregler

- Vi hade rätt om $X \geq c \in \mathbb{Z}$ är välvalt.
- Vi hade kanske fel om $X < c$.

$$P_{H_o}(X \geq c) = P_{\text{Bin}(n,p)}(X \geq c) \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - n\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}{\sqrt{n\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) \lesssim \alpha = \text{ signifikansnivån} \qquad n \text{ stort}$$

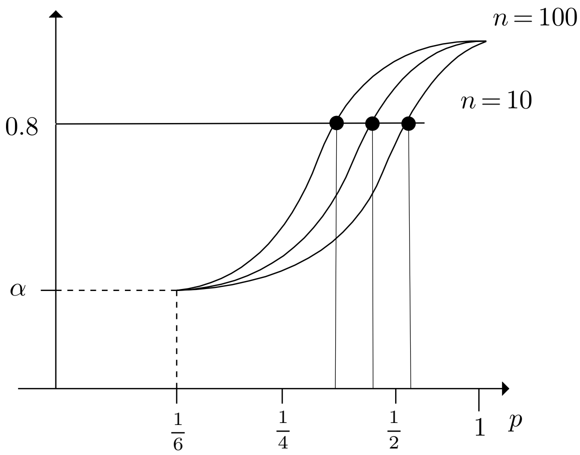
X kallas för testvariabel, $p = \frac{1}{6}$ som kritiskt värde.

Typisla val av $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$

Testets styrka i alternativet p $\left(p \geq \frac{1}{6}\right)$.

$$\begin{aligned} P_p(X \geq c) &= P_p(\text{förkasta nollhypotesen}) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{c_\alpha(n) - n\,p - \frac{1}{2}}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

Denna är ensidig. Enbart större än $\frac{1}{6}$. Vanligt med tvåsidig, d.v.s. avvikelse åt båda håll straffas.



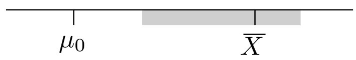
Figur. Illustration för styrka för kurvor för olika n.

$X_1, ..., X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$

$$H_0\colon \mu = \mu_o, \quad \text{ofta } \mu_0 = 0$$

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t\text{–fördelad}(n-1)$$

$$\begin{array}{llll} H_1\colon & \mu \neq \mu_0 & \text{tvåsidigt test} & |T| \geq c \\ H_1'\colon & \mu > \mu_0 & \text{ensidigt test} & T > c' \\ H_1''\colon & \mu < \mu_0 & \text{ensidigt test} & T > c'' \end{array}$$



Figur. Konfidensintervallet, konfidensgrad som är $1-\alpha$.

12.3 Tvåstickprov

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(m+n-2)$$

$$S_p^2 = \frac{(n-1)\,S_X^2 + (m-1)\,S_Y^2}{m+n-2}$$

$$X_1, ..., X_n \quad X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2) \quad Y_1, ..., Y_m \quad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$$

Inlämningsuppgiften: hur stora stickprov behöver göras för att kunna garantera rätt styrka? m.m.

13 Föreläsning 13 — 21 maj 2015

Tvåsticksprovsmetoder

1. Normalfördelad
2. Binomialfördelad

Nästa gång: linjär regression och tvådimensionella normalfördelningar.

13.1 Enstickprov

Exempel

$X_1, \ldots, X_n$ oberoende $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 okänt. H_0: $\mu = 0$ mot H_1: $\mu \neq 0$.

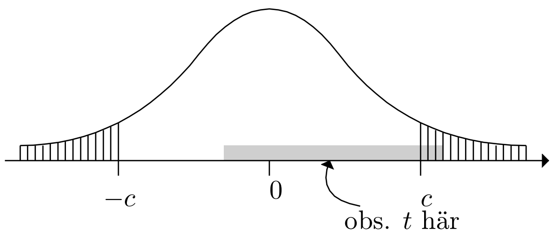
Tvåsidigt t–test

Teststatistika

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 0}{S_X} \overset{H_0}{\sim} t\text{–förd}(n-1).$$

Förkasta nollhypotesen om $|T| \geq c$, d.v.s. om $T \leq -c$ eller $T \geq c$

$$P_{H_0}(|T| \geq c) = 2\,(1 - F_{t(n-1)}(c)) = \alpha, \quad \alpha = \text{signifikansnivå}, \ c = \text{kritiska värdet}.$$



Figur. Normalfördelning med kritiska värdet inritat.

Vid genomförande av testet använder man observationerna $X_1, \ldots, X_n$ och beräknar ett utfall på T, t. Om $t < -c$ så tror vi på alternativet $\mu < 0$ och om $t > c$ så tror vi på alternativet $\mu > 0$.

$$\mu = \overline{X} \pm c\,\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ((1-\alpha)\cdot 100\%)$$

Exempel – Test av medianer

$X_1, \ldots, X_n$ oberoende med fördelningsfunktion F.

H_0: $m = m_0$ $\left(m\text{:} \quad F(m) = \frac{1}{2}\right)$

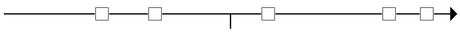
$T = \text{antalet } X_i \leq m_0$

$T \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right) \quad F(m_0) = \frac{1}{2}$

Förkasta om $\left|T - \frac{n}{2}\right| \geq c$ för lämpliga c.

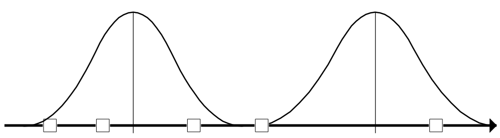
Om $T \geq \frac{n}{2} + c$, tyder på $m < m_0$.

Om $T \leq \frac{n}{2} + c$, tyder på $m > m_0$.



Figur. Stickprov kring median.

13.2 Tvåstickprov



Figur. Figur som visar två normalfördelademängder med väntevärde μ_X och μ_Y och stickprov utritade.

Två oberoende stickprov

$$X_1, \ldots, X_n \quad Y_1, \ldots, Y_m, \qquad X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2).$$

Om både σ_X^2 och σ_Y^2 är kända så

$$\hat{\mu}_X = \overline{X} \sim N\left(\mu_X; \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

$$\hat{\mu}_Y = \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y; \frac{\sigma_Y^2}{m}\right).$$

Differensen

$$\Delta_\mu = \mu_Y - \mu_X \approx \hat{\mu}_Y - \hat{\mu}_X \sim N\left(\mu_Y - \mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

Pivot

$$\frac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_Y - \mu_X)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1).$$

$$\Delta_\mu = (\hat{\mu}_Y - \hat{\mu}_X) \pm c \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \qquad ((2\,\Phi(c) - 1)\,100\%)$$

$$\frac{\overline{Y} - \overline{X} - \Delta_\mu}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \approx N(0, 1) \quad \text{om både } m \text{ och } n \text{ stora.}$$

$X_1, \ldots, X_n \quad Y_1, \ldots, Y_n$ oberoende $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ och $Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$

σ^2 (samma i båda stickproven) känd.

Från tidigare enstickprovsteorin vet vi att

$$\overline{X}, \frac{(n-1)\,S_X^2}{\sigma^2} \quad \text{och} \quad \overline{Y}, \frac{(m-1)\,S_Y^2}{\sigma^2}$$

är oberoende

$$\begin{array}{ll} \overline{X} \sim N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma^2}{n}\right) & \dfrac{(n-1)\,S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma^2}{m}\right) & \dfrac{(m-1)\,S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1). \end{array}$$

Vad kan vi säga om

$$\Delta_\mu = \mu_y - \mu_x?$$

$$\frac{\overline{Y} - \overline{X} - \Delta_\mu}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

(och oberoende)

$$\frac{(m+n-2)\,S_P^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\,S_X^2 + (m-1)\,S_Y^2}{\sigma^2}$$

$$\left(S_p^2 = \frac{(n-1)\,S_X^2 + (m-1)\,S_Y^2}{m+n-2}\right)$$

$$\frac{\overline{Y} - \overline{X} - \Delta_\mu}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t\text{–fördelad}(m+n-2)$$

o.s.v. för konstruktion av konfidensintervall.

13.3 Tvåstickprovs *t*–test (samma modell)

$$H_0: \quad \Delta_\mu = 0 \qquad T = \frac{\overline{Y} - \overline{X} - 0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t\text{–fördelad}(n+m-2)$$

Exempel (tvåsidig mothypotes)

$H_1: \quad \Delta_\mu \neq 0$

$T \leq -c$ eller $T \geq c \Longrightarrow$ förkasta H_0. $2(1 - F_{t(m+n-2)}(c)) = \alpha \quad \longleftarrow$ signifikansnivå.

Avgörande för styrkan blir $m, n \ldots$ och $\frac{\mu_Y - \mu_X}{\sigma}$.

Om oberoende mellan paren $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \cdots (X_n, Y_n)$, så måste mått inom paren exempelvis

$$\Delta_i = Y_i - X_i \sim N(\Delta, \sigma^2)$$

och använder enstickprovsteori för analys av $E[Y_i - X_i] = E[Y_i] - E[X_i]$. Kan öka precision på resultaten genom att valda par eliminerar vissa variabler, exempel ålder.

Exempel

$X \sim \text{Bin}(n, p_X) \quad Y \sim \text{Bin}(m, p_Y)$

$p_Y - p_X$? söker konfidensintervall

Sätt $\hat{p}_X = \frac{X}{n}$ och $\hat{p}_Y = \frac{Y}{m}$.

Pivot

$$\frac{\hat{p}_Y - \hat{p}_X - (p_Y - p_X)}{\sqrt{\frac{p_Y\,(1-p_Y)}{m} + \frac{p_Y\,(1-p_Y)}{m}}}$$

och vi gör antagande att m och n stort så att vi kan approximera som

$$\frac{\hat{p}_Y - \hat{p}_X - (p_Y - p_X)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_Y\,(1-\hat{p}_Y)}{m} + \frac{\hat{p}_Y\,(1-\hat{p}_Y)}{m}}} \approx N(0, 1).$$

Då får vi konfidensintervall

$$p_Y - p_X = \hat{p}_Y - \hat{p}_X \pm c\sqrt{\frac{\hat{p}_Y\,(1-\hat{p}_Y)}{m} + \frac{\hat{p}_Y\,(1-\hat{p}_Y)}{m}} \qquad ((2\,\Phi(c) - 1) \cdot 100\%).$$

14 Föreläsning 14 25 maj 2015

- Linjär regression
- Tvådimensionella normalfördelningar
- Nästa gång löser vi Aug. 2014 omtenta

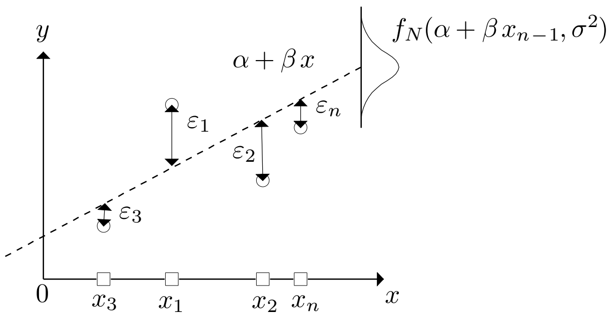
14.1 Linjär regression

$x_1, ..., x_n$ deterministiska värden på en inställningsvariabel $x \in \mathbb{R}$. För varje inställning gör vi ett försök och mäter en svarsvariabel $y_1, ..., y_n$, innan förs-så $Y_1, ..., Y_n$ (oberoende).

$$E[Y_i] = \alpha + \beta x$$

$$Y_i = E[Y_i] + \varepsilon_i \quad \longleftarrow \text{residual.}$$

$\mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$ likadana för alla i (x_i) (homo"scedastisk" modell) + normalfördelningsantagande



Figur. Mätningar längs x och linjär regression.

Statistik för α, β och σ. Hur skattar man? Maximum likelihood–skattningar.

Vad är likelihood–funktionen?

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \sigma) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(y_i - (\alpha - \beta x_i))^2}{\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\,\sigma\right)^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\alpha - \beta x_i))^2}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

Fixera σ^2, då optimeras (maximeras) L av argumentet som

$$\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = \mathrm{argmin}\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha - \beta x_i))^2\right), \quad x_i \text{ och } y_i \text{ kända.}$$

Får ekvationssystem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i)) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - (\alpha + \beta x_i)) = 0$$

Insubstitution av

$$\overline{y} - \alpha - \beta\,\overline{x} = 0$$

ger

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \left(= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} Y_i}_{\text{(teoretisk varians)}} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} \right) \right)$$

och vidare

$$\hat{\alpha} = \underbrace{\overline{Y} - \hat{\beta}\,\hat{x}}_{\text{oberoende, visas separat}} \sim N\left(\alpha, \sigma^2 \left(\frac{1}{n^2} + \overline{x}^2 \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} \right) \right).$$

$$0 = -\frac{\mathrm{d} \ln L(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \sigma)}{d\sigma} \quad \Longrightarrow \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x_i))^2 = \frac{n-2}{n} S^2$$

$$\text{där } S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\,x_i))^2.$$

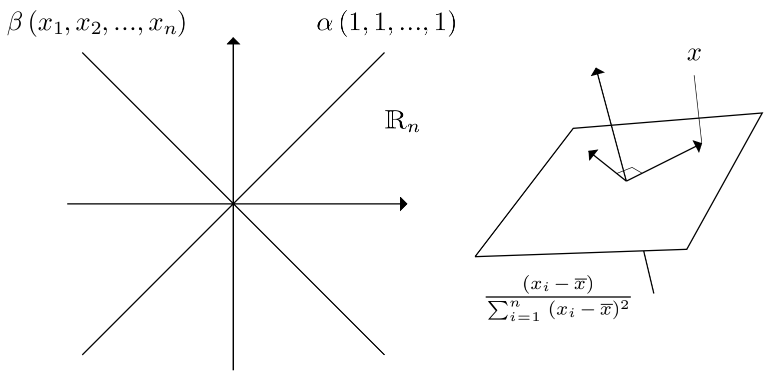
Sats

I en linjär regressionsmodell med α, β och σ^2 som intercept–, lutnings– och variansparametrar (och med normalfördelningsantagande) så gäller

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2} \right) \\ \overline{Y} &\sim N\left(\alpha + \beta\,x, \frac{\sigma^2}{n^2} \right) \\ \frac{(n-2)\,S^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2\text{–fördelad}(n-2) \end{aligned}$$

(alla oberoende).

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \overline{Y} - \hat{b}\,\overline{x} \\ &= \alpha\,(1,1,\ldots,1) + \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$



Figur. Geometrisk tolkning rörande oberoende.

14.2 Pivoter för konfidensintervall

σ^2 känt $\quad \dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}} \sim N(0,1)$

Exempel

Symmetrisk 99%

$$\beta = \hat{\beta} \pm 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} \quad (99\%).$$

Om σ^2 okänt

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{S\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}} \sim t\text{–fördelad}(n-2).$$

För α fås

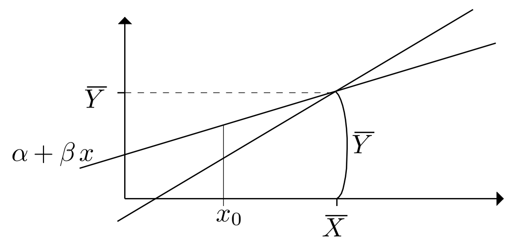
$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}} \sim N(0,1) \quad (\text{känt } \sigma)$$

och

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}} \sim t\text{–fördelad}(n-2) \quad (\text{okänt } \sigma).$$

$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_0 = \overline{Y}+\hat{\beta}\,(x_0-\overline{x}) \sim N\left(\alpha+\beta\,x_0, \sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right)\right)$$

$$\hat{\alpha}+\beta\,X = \hat{\alpha}+\hat{\beta}\,(x-\overline{x})$$



Figur. Skärande linjer med skärningspunkt i $(\overline{X}, \overline{Y})$. Nya mätningen x_0 i räkningarna inritad.

$$\frac{\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_0-(\alpha+\beta\,x_0)}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}} \sim t(n-2)$$

Låt Y_{n+1} vara en ny observation vid inställning x_0

$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_0-Y_{n+1} \sim N\left(0, \sigma\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right)\right)$$

$$Y_{n+1} = \hat{\alpha}+\hat{\beta}\,x_0 \pm c\,S\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} \quad [(2\,F_{t(n-2)}(c)-1)\cdot 100\%]$$

Detta kallas för prediktionsintervall.

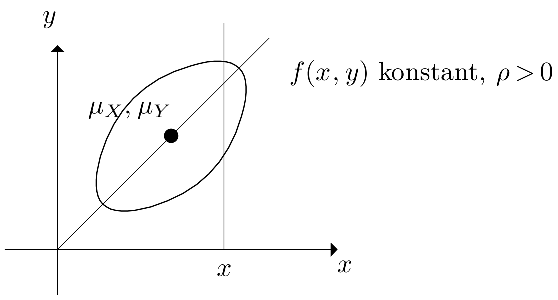
14.3 Tvådimensionell normalfördelning

X och Y tvådimensionellt normalfördelningar

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu_X & E[Y] &= \mu_Y \\ \mathrm{Var}[X] &= \sigma_X^2 & \mathrm{Var}[Y] &= \sigma_Y^2 \\ \text{och}\quad S &= \frac{\mathrm{Kov}[X,Y]}{\sigma_X\,\sigma_Y}, & -1 &< s < 1. \end{aligned}$$

Fördelningsfunktion

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\,\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2+2\rho\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)}.$$



Figur. Skärning av en tvådimensionell normalfördelning.

$$f_{(Y|X)}(y|x) = N\left(\mu_Y + \rho\,\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\,\sigma_Y, \sigma_Y^2\,(1-\rho^2)\right)$$

15 Föreläsning 15 27 maj 2015

15.1 Tentan från 27 Augusti 2014

15.1.1 1.

Tre tärningar kastas

a) $P\left(\underbrace{\text{summa=4}}_{A}\right)$, $A=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$. Totala antalet $6\times6\times6$.

$$\frac{3}{6^3}.$$

b)

$$1-\frac{4}{6^3}.$$

c)

$$A=\{3\times(1,1,6),3!\times(1,2,3)\}$$

$$\frac{3+3!}{6^3}=\frac{9}{6^3}.$$

15.1.2 2.

$$P(A)=0.2,P(B)=0.4,P(C)=0.9,\quad A,B,C \text{ oberoende.}$$

a) $P=(1-0.2)(1-0.4)(1-0.9)=0.8\times0.6\times0.1=0.048$

b) $X=$ antalet som inträffar. $E(X)=?$

$$I_A=\begin{cases}1 & \text{om } A \text{ inträffar}\\ 0 & \text{om } A \text{ inte inträffar}\end{cases}$$

$$X=I_A+I_B+I_C\Longrightarrow E[X]=E[I_A]+E[I_B]+E[I_C]=0.2+0.4+0.9=1.5$$

c)

$$\mathrm{Var}[I]=E[I^2]-E[I]^2=\{\text{här, ty } I=I^2\}=E[I]-E[I]^2$$

$$\mathrm{Var}[X]=\{\text{ober.}\}=\mathrm{Var}[I_A]+\mathrm{Var}[I_B]+\mathrm{Var}[I_C]=0.2\times0.8+0.4\times0.6+0.9\times0.1=0.49$$

15.1.3 3.

a) ML–skattning?

$$L(\theta,x_1,...,x_4)=\prod_{i=1}^{4}\frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}}}{x_i!}=\frac{1}{x_1!\cdots x_4!}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^4 x_i}\mathrm{e}^{-4\frac{1}{\theta}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta) &= 0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\ln(\theta)\sum_{i=1}^4 x_i\right)+\frac{4}{\theta^2}\\ &\Longleftrightarrow\ -\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)+\frac{4}{\theta^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad \hat\theta=\frac{1}{\overline{X}}.\end{aligned}$$

b) Sätt in siffror.

15.1.4 4.

a) $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$ obs. $\hat{\lambda} = \frac{1}{3.8}$ (Momentmetod eller maximum likelihood)

b) Ex. $E[X_i = \frac{1}{\lambda}]$ skattas av $\frac{1}{\hat{\lambda}} = 3.8$

c)

$$P(X \le m) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{skattas av} \quad 3.8\ln(2)$$

d)

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - F(5) \\ &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda 5}) = \mathrm{e}^{-\lambda 5} \\ \text{skattas av} \quad & \mathrm{e}^{-\frac{5}{3.8}}. \end{aligned}$$

e) $E[\overline{X}] = \frac{1}{\hat{\lambda}}$ väntevärdesriktig

$$\sqrt{\mathrm{Var}[\overline{X}]} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\lambda^2}}{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}\,\lambda} \quad \text{skattas av} \quad \frac{1}{\sqrt{15}\,\hat{\lambda}}.$$

15.1.5 5.

$X_1, \ldots, X_8 \quad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ (olika)

Observerat $\overline{X} = 15.27$, S=0.47

a) Observerat 95% konfidensintervall för μ? σ okänd gör att vi skall använda t–fördelning.

Pivot

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t\text{–fördelad}(8 - 1 = 7) \quad F_{t(7)}(c) = 0.975 \text{ (ur tabell)} = 2.365$$

Teoretiskt intervall

$$\mu = \overline{X} \pm 2.365\,\frac{S}{\sqrt{n}} \quad (95\%)$$

observerat intervall

$$\mu = 15.27 \pm \frac{2.36 \times 0.47}{\sqrt{8}}.$$

b) H_0: $\mu = 15$ mot H_1: $\mu > 15$

Alternativ 1, ensidigt t–test

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 15}{S} \underset{H_0 \text{ sann}}{\sim} t(7).$$

Förkasta H_0 om $T \Longrightarrow c'$ $\quad F(c') = 0.99 \Longrightarrow c' = 2.998$

Observerat $t = \sqrt{8}\,\frac{15.27 - 15}{0.47} < 3 \quad \Longrightarrow \quad$ Vi kan inte förkasta nollhypotesen

Alternativ 2, Genomför testet genom att bilda ett nedåt begränsat konfidensintervall I för μ med konfidensgrad 99%. Förkasta om H_0 om $\mu \not< I$.

$$\mu \ge \overline{X} - 2.998 \times \frac{5}{\sqrt{8}} \quad (99\%)$$

$$\mu \ge 15.27 - \frac{2.98 \times 0.47}{\sqrt{8}}$$

15.1.6 6.

a)

$$f(x) = (1-p)^{x-1}\,p \quad x = 1, 2, \ldots,$$

$$P(X \in \{2, 4, \ldots\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-1}\,p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^k = \ldots = \frac{1/4}{3/4}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} - 1\right) = \frac{3}{7}.$$

b) $X_1 =$ antalet till första gången vi får A, $X_2 =$ antalet mellan första och andra gången vi får A

$$P(X_1 + X_2 = \text{“jämn”}) = P(X_1 + X_2 \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\})$$

ekvivalent med

$$P(\text{“båda jämna”} \cup \text{“båda udda”}) = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2.$$

15.1.7 7.

a)

$n(\Omega) = \binom{15}{5}$, $\quad n(A) = \binom{12}{5}$

$$P(A) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{15}{5}}$$

b)

$$P(B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{12}{4}}{\binom{15}{5}}$$

15.1.8 8.

a) $Z = \min(X, Y) \quad \Longrightarrow \quad P(Z \le z) = 1 - P(\min(X, Y) > z) = 1 - P(X > z)\,P(Y > z) = 1 - \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)z}$

derivering...

b) $Z = \max(X, Y) \quad \Longrightarrow$ likartat...

15.1.9 9.

a) $\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 1.23 - 0.22 \times 0.32$

b) $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\,2$

$\vdots$