

Tentamen i Fasta tillståndets fysik (TIF400/FFY012/FYP330)

Tid: fm, 2025-08-27

Examinator: Mattias Thuvander (3322)

Lärare vid tentamen:

Fråga 1, Julia Maibach (031 772 1258) eller Mattias Thuvander (073 143 3709)

Fråga 2 och 3, Mattias Thuvander (073 143 3709)

Fråga 4 och 5, Elsebeth Schröder (031 772 8424)

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, penna, sudd, passare, linjal, gradskiva, Chalmersgodkänd räknare i fickformat, utan inprogrammerad text/ekvationer relevant för tentamen, och ett egenproducerat handskrivet A4 (dubbelsidigt) med valfritt innehåll.

Bedömning: Max 100p. Betyg Chalmers: 3- 50p, 4- 70p, 5- 85p. Betyg GU: G- 50p, VG- 75p.

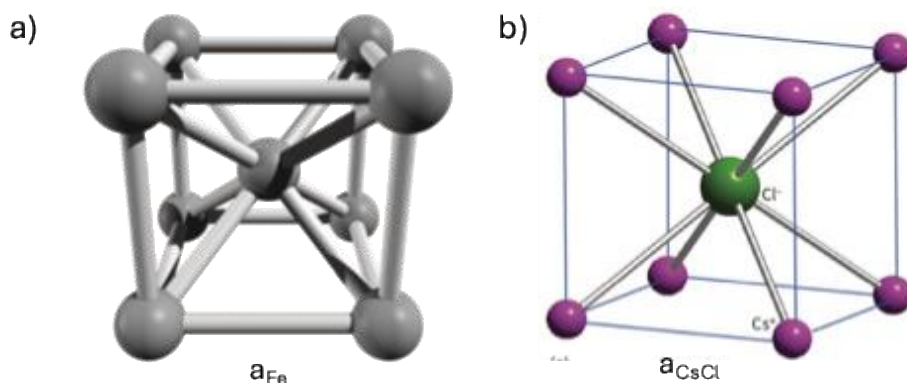
Skriv tydligt och motivera dina svar.

Lycka till!

(Observera att deluppgifterna ofta kan lösas utan att de tidigare deluppgifterna har lösts.)

Uppgift 1

- a) Beskriv de två kristallstrukturer som visas i figur 1. Ange gitter och bas samt antal atomer i enhetscellen och deras koordinater.



Figur 1: a) Fe kristallstruktur (Wikipedia); b) CsCl kristallstruktur (chemtube3d.com).

(6 p)

- b) Beräkna packningsdensiteten i procent för (110) planet i Fe (Fig. 1a).
Antag att atomerna är hårda sfärer.
Jämför med packningsdensiteten i procent för (110) planet i CsCl med
jonradie $r(\text{Cs}) = 1,67 \text{ \AA}$, jonradie $r(\text{Cl}) = 1,81 \text{ \AA}$, gitterkonstant $a(\text{CsCl}) = 4,12 \text{ \AA}$.

(6 p)

- c) Beräkna strukturfaktorn för båda kristallstrukturerna i figur 1. Anta
följande atomära formfaktorer $f(\text{Fe}) = 26 \cdot c$, $f(\text{Cs}) = 55 \cdot c$, $f(\text{Cl}) = 17 \cdot c$.

(8 p)

Uppgift 2

En röntgenstråle träffar en SC-kristall med gitterkonstant $3,19 \text{ \AA}$ i riktningen $[1\ 2\ 3]$.

- a) Vilken energi ska röntgenstrålningen ha för att diffraktion från (401)
planen ska erhållas?

(14 p)

- b) Vilken energi skulle det bli om det i stället var en neutronstråle?

(6 p)

Uppgift 3

- a) Vi betraktar en endimensionell kedja atomer av nickelisotopen ^{58}Ni .
Antag att fjäderkonstanten är 20 N/m , och att avståndet mellan atomerna
är $2,0 \text{ \AA}$. Hur stor är vågvektorn i 2:a Brillouinzonen som har fononenergin
 10 meV ?

(10 p)

- b) Vi byter ut varannan nickelatom mot kobolt (^{59}Co). Hur stor blir
skillnaden i energi mellan akustiska och optiska fononer om vågvektorn
ligger på Brillouinzons-gränsen? Fjäderkonstanten är fortfarande 20 N/m .

(5 p)

- c) Beskriv hur atomerna i en endimensionell kedja med två atomer i basen
rör sig för små värden på vågvektorn i akustiska respektive optiska
grenen. Rita atomerna och ange med pilar hur de rör sig.

(5 p)

Uppgift 4

- a) Rita ett relativt korrekt och tydligt diagram över bandstrukturen $E(k)$ som funktion av k (i en dimension) för en n-dopad halvledare som har större effektiv hålmassa än effektiv elektronmassa. För en låg (men inte noll) temperatur, lägg in donatornivån och kemiska potentialen i diagrammet. Du måste även med ord motivera dina val för hur du ritar diagrammet.

(5p)

- b) ZnO är en såkallad "wide bandgap" halvledare, med ett relativt stort direkt bandgap på 3,37 eV. Effektivmassorna för elektron och hål är $m_e^*/m_e = 0,24$ och $m_h^*/m_e = 0,59$.

För ZnO som intrinsisk halvledare: Beräkna på enklast möjliga sätt elektron- och håltätheten vid rumstemperatur.

OBS: Bandgapet i ZnO är större än vad vi vanligtvis ser i uppgifter, och därmed blir tätheten av ledningselektroner utan dopning också väldigt liten - får du mycket mindre värde än du brukar se har du alltså inte nödvändigtvis räknat fel.

Utan att beräkna kemiska potentialen μ : ligger μ över eller under mitten av bandgapet? Motivera. Beräkna sedan μ .

(8p)

- c) ZnO dopas genom att ersätta några av Zn atomerna med Al atomer. Blir halvledaren då n- eller p-dopad? Estimera även donator- (om svar: n-dopad) eller acceptor- (om svar: p-dopad) nivåns energiskillnad till lednings- eller valensbandet. ZnO har dielektricitetskonstanten $\epsilon = 8 \epsilon_0$.

(7p)

Uppgift 5

ENDAST FÖR KURS TIF400 OCH FYP330 (nuvarande version av kursen som går på höstterminer)

En metall-folie med tjockleken 0,02 mm placeras så att ett magnetfält med fältet $B = 2,0$ T går vinkelrätt igenom folien. När en ström på 1,5 A skickas genom folien uppstår en elektrisk potential på 1,23 μV i folien, vinkelrätt mot strömriktningen.

- a) Bestäm Hall-koefficienten och elektrontätheten för metallen. **(10p)**
- b) Vi antar att metallen kan beskrivas väl med den simpla (tre-dimensionella) elektrongasmodellen. Bestäm Fermi-energin och Fermi-vektorns längd. Beskriv i ord och skissa Fermi-"ytan" för elektrongas-systemet i 1, 2 och 3 dimensioner. Motivera. **(10 p)**

Uppgift 5

ENDAST FÖR KURS FFY012 (gamla varianten av kursen som gick på vårterminer)

En metall-folie med tjockleken 0,02 mm placeras så att ett magnetfält med fältet $B = 2,0 \text{ T}$ går vinkelrät igenom folien. När en ström på 1,5 A skickas genom folien uppstår en elektrisk potential på 1,23 μV i folien, vinkelrät mot strömriktningen.

- a) Bestäm Hall-koefficienten och elektrontätheten för metallen.

(10p)

Samma metall kan bli supraledande vid tillräckligt låg temperatur. Den kritiska temperaturen för supraledning är $T_c = 7,19 \text{ K}$, och det kritiska magnetfältet är $B_c = 0,0803 \text{ T}$.

- b) För vilka värden på det magnetiska fältet är metallen supraledande vid temperaturen 4 K (förutsatt att ingen ström skickas genom metallen)?

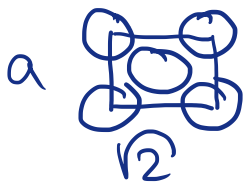
(10p)

Uppgift 1

a)

kristallstruktur	Fe	CsCl
gitter	BCC	SC
bas	(0,0,0)	Cs (0,0,0), Cl ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)
# atomer i enhetscellen	2	2

b) Fe (110) plan



→ 2 Fe atomer

$$4r = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$$

$$\text{packningsdensitet} = \frac{\text{area (Fe)}}{\text{area (110) plan}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi r^2}{\sqrt{2} a^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{\sqrt{2} \left(\frac{4r}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2} \frac{16}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2} \frac{8}{3}} \approx 83,3\%$$

CsCl

1 Cs atom + 1 Cl atom

$$\text{Area CsCl} = \pi r_{\text{Cl}}^2 + \pi r_{\text{Cs}}^2 = 19.054 \text{ \AA}^2$$

$$\text{area (110)} = \sqrt{2} a^2 = 24.05 \text{ \AA}^2$$

packningsdensitet $\approx 79.4\%$.

→ CsCl har lägre packningsdensitet, som förväntat för en SC struktur jämfört med BCC.

c) Strukturfaktor för Fe

2 atomer

$$\vec{r}_1 = [0, 0, 0]$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2} \vec{a}_1 + \frac{1}{2} \vec{a}_2 + \frac{1}{2} \vec{a}_3 = \frac{a}{2} [1, 1, 1]$$

$$\vec{G} = h \vec{b}_1 + k \vec{b}_2 + l \vec{b}_3$$

$$S_{\vec{G}}(hkl) = \sum_{j=1}^2 f_j \exp(-i \vec{G} \cdot \vec{r}_j) = f_1 + f_2 \exp(-i\pi(h+k+l))$$

$$= \{ f_1 = f_2 = f_{\text{Fe}} = C \cdot 26 \}$$

$$= \begin{cases} 2f_{\text{Fe}} = 52 \cdot C & \text{om } h+k+l = \text{jämnt tal} \\ 0 & \text{om } h+k+l = \text{udda tal} \leftarrow \text{ingen intensitet} \end{cases}$$

CsCl

$$S_{\vec{G}}(hkl) = \begin{cases} f_{\text{Cs}} + f_{\text{Cl}} = C \cdot 72 \\ f_{\text{Cs}} - f_{\text{Cl}} = C \cdot 38 \end{cases}$$

om $h+k+l = \text{jämnt tal}$

om $h+k+l = \text{udda tal}$

→ alla reflexer tillåtna men med olika intensiteter

2

$$a = 3,19 \text{ \AA}$$

$$a) \vec{k} = c[1 \ 2 \ 3]$$

$$\rightarrow |\vec{k}| = \sqrt{14} c$$

$$\vec{G} = \frac{2\pi}{a}[4 \ 0 \ 1]$$



$$\text{Lagge ger } \Delta \vec{k} = \vec{k}' - \vec{k} = \vec{G}$$

$$\text{Elastisk spridning ger } |\vec{k}'| = |\vec{k}|$$

$$\vec{k}' = \vec{k} + \vec{G} = c[1 \ 2 \ 3] + \frac{2\pi}{a}[4 \ 0 \ 1] =$$

$$= \left[c + \frac{8\pi}{a}, \ 2c, \ 3c + \frac{2\pi}{a} \right]$$

$$|\vec{k}'|^2 = \left(c + \frac{8\pi}{a} \right)^2 + 4c^2 + \left(3c + \frac{2\pi}{a} \right)^2 = 14c^2$$

$$c^2 + \frac{64\pi^2}{a^2} + \frac{16\pi}{a}c + 4c^2 + 9c^2 + \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{12\pi}{a}c = 14c^2$$

$$\rightarrow c = - \frac{17\pi}{7a}$$

$$\rightarrow |\vec{k}| = \frac{17\pi}{7a} \sqrt{14} = \frac{17\pi}{7 \cdot 3,19} \sqrt{14} = 8,95 \text{ \AA}^{-1}$$

$$\underline{E = \hbar c |\vec{k}| = 6,58 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 8,95 \cdot 10^{10} = 17,7 \text{ keV}}$$

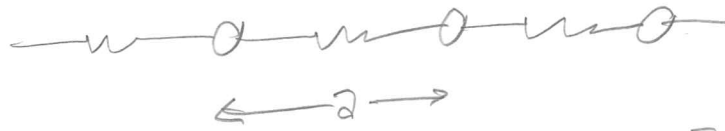
b) Vi behöver samma $|\vec{k}|$ så

$$E = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 8,95 \cdot 10^{10})^2}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 2,64 \cdot 10^{-20} \text{ J} =$$

$$= \frac{2,64 \cdot 10^{-20}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = \underline{\underline{0,17 \text{ eV}}}$$

3)

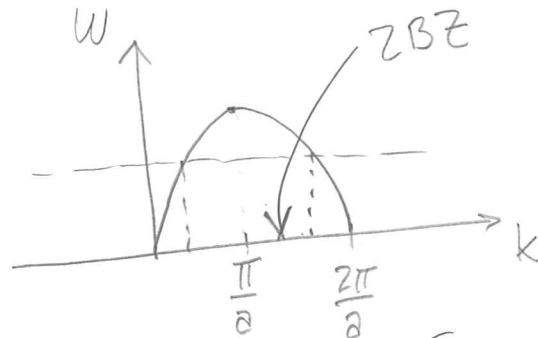
a)



$$C = 20 \text{ N/m}$$

$$a = 2,0 \text{ \AA}$$

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{C}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$



$$E = \hbar \omega = 10 \text{ meV} \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{0,01 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,05 \cdot 10^{-34}} =$$

$$= 1,52 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

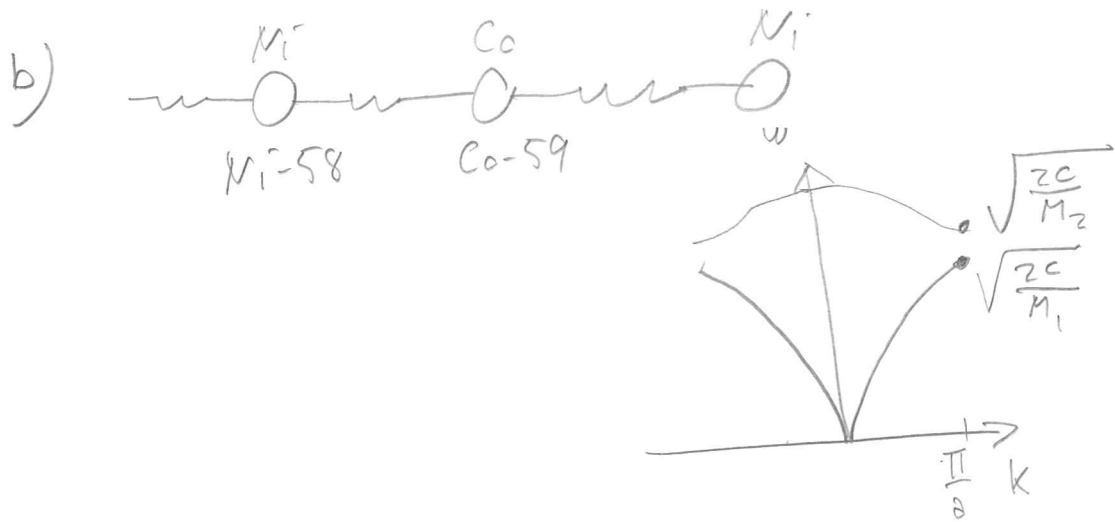
$$\rightarrow \left| \sin \frac{ka}{2} \right| = \frac{\omega}{2} \cdot \sqrt{\frac{M}{C}} = \frac{1,52 \cdot 10^{13}}{2} \cdot \left(\frac{57,9 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{20} \right)^{1/2}$$

$$\left| \sin \frac{ka}{2} \right| = 0,527$$

$$\rightarrow \frac{ka}{2} = \arcsin 0,527 = 0,55$$

$$\rightarrow k_{1BZ} = \frac{2 \cdot 0,55}{2} = 0,55 \text{ \AA}^{-1}$$

$$\underline{\underline{k_{2BZ} = \frac{2\pi}{a} - 0,55 = \pi - 0,55 = 2,59 \text{ \AA}^{-1}}}$$



$$\omega_{\text{opt}}^{\text{min}} = \sqrt{\frac{2c}{M_2}} = \left(\frac{2 \cdot 20}{57,9 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} = 2,03 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

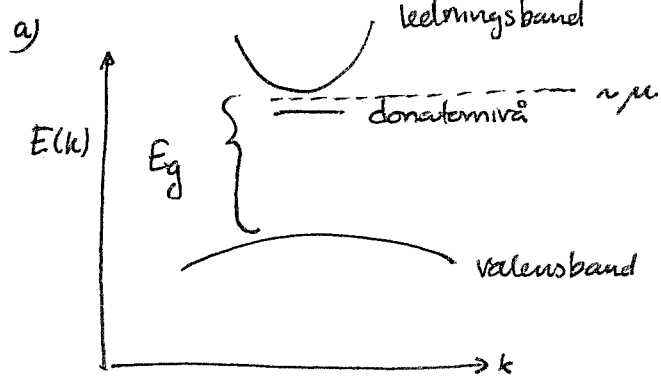
$$\omega_{\text{akv}}^{\text{max}} = \sqrt{\frac{2c}{M_1}} = \left(\frac{2 \cdot 20}{58,9 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} = 2,02 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

$$\rightarrow \Delta \omega \approx 1 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \rightarrow \underline{\underline{E = \hbar \Delta \omega = 6,58 \cdot 10^{-16} \cdot 1 \cdot 10^{11} = 66 \text{ meV}}}$$

c) Akku: $\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{matrix}$

opt: $\begin{matrix} \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{matrix}$

Uppgift 4.



$$\text{Eftersom } \frac{1}{m_{e,h}^*} = \pm \frac{1}{\hbar^2} \nabla^2 E$$

$$\text{f.ä.s } m_h^* > m_e^* \Rightarrow (\nabla^2 E)_h < (\nabla^2 E)_e$$

alltså valeusbandet mer "platt" än ledningsbandet.

Vid låg temperatur kommer i stort sett alla elektroner till ledningsbandet från donatoratomerna och kemiska potentialen kommer ligga $\sim$ mellan donatornivån och ledningsbandet, på samma sätt som kemiska potentialen ligger mellan valeus- och ledningsband i odopad halvledare, fast med lite annan statistik.

b) ZnO $E_g = 3,37 \text{ eV}$, $m_e^* = 0,24 m_e$, $m_h^* = 0,59 m_e$.

Intrinsisk, där är $n = p (= n_i)$.

$$\text{Vi har } n_i = \sqrt{np} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_e^* m_h^*)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{0,026 \text{ eV}}{\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 6,58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}} \right)^{3/2} 0,1416^{3/4} (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^{3/2}$$

Enheter:

$$\left(\frac{\text{eV}}{\text{Js eVs}} \right)^{3/2} \text{ kg}^{3/2} =$$

$$\left(\frac{\text{kg}}{\text{Js}^2} \right)^{3/2} = \text{m}^{-3}$$

OK!

$$\times \exp(-3,37 \text{ eV} / 2 \cdot 0,026 \text{ eV})$$

$$[m_e^* m_h^* = 0,1416 m_e^2, k_B T = 0,026 \text{ eV}]$$

$$= 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-3} = 400 \text{ cm}^{-3} \text{ Extremt litet!}$$

Kemiska potentialen ges (för intrinsisk halvledare) av

$$\mu = \frac{1}{2} E_g + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_h^*}{m_e^*}. \quad (\text{med } E_{\text{valeusstopp}} = 0)$$

Eftersom $m_h^* > m_e^*$ blir sista termen positiv och μ hamnar över mitten av bandgapet, $\mu > \frac{1}{2} E_g$.

4b) fortsatt. Med värden:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 3,37 \text{ eV} + \underbrace{\frac{3}{4} \cdot 0,026 \text{ eV} \ln \frac{0,59}{0,24}}_{0,0175 \text{ eV}} = \underline{1,70 \text{ eV}}$$

4c) ZnO dopas, Al $\rightarrow$ Zn. Al 3 valens-elektroner
Zn 2 valens-elektroner

Det blir alltså 1 elektron "över" per dopningsatom.

$\Rightarrow$ n-dopning

Estimera donatornivån E_d (avstånd i energi från lägsta tillstånd i ledningsbandet).

Väteatomens grundtillstånd

$$E^H = - \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = 13,6 \text{ eV}$$

Ta $m_e \rightarrow m_e^*$, $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0$

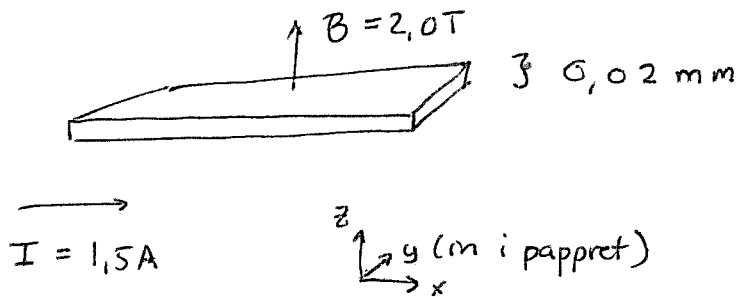
dvs $m_e \rightarrow 0,24 m_e$, $\epsilon_0 \rightarrow 8 \epsilon_0$

$$-E_d \approx - \frac{m_e^* e^4}{8 \epsilon^2 h^2} = - \frac{0,24 m_e e^4}{8 \cdot 8^2 \epsilon_0^2 h^2} = - \frac{0,24}{8^2} E^H = -51 \text{ meV}$$

E_d I $\underbrace{\quad}_{\text{don.}}$ $\underbrace{\quad}_{\text{ledn.}}$ 51 meV.

$\underbrace{\quad}_{\text{valens}}$

Uppgift 5 g) Metallfolie Hall-effekt - mätning



Potential (parallellt m y-riktning) $|V_y| = 1.23 \mu V$.

Bestäm Hallkoefficienten R_H , antag bredd på folien l

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B_z}$$

$$E_y = V_y / l$$

$$j_x = I / (l \cdot d)$$

$$= \frac{V_y l^{-1}}{I l^{-1} d^{-1} B_z} = \frac{-1.23 \cdot 10^{-6} V \cdot 2 \cdot 10^{-3} m}{1.5 A \cdot 2.0 T} = -8.2 \cdot 10^{-12} \frac{m^3}{As}$$

Vi vet ej tecken från uppgiftens text, men i en metall är laddningsbärarna negativa (elektroner) och då måste $R_H < 0$, ergo är alltså potentialen negativ.

$$\left[\frac{Vm}{AT} = \frac{Vm}{AVsm^{-2}} = \frac{m^3}{As} \right]$$

Elektrontäthet

$$R_H = -\frac{1}{en} \quad \text{dvs}$$

$$n = -\frac{1}{e R_H} = \frac{1}{1.60 \cdot 10^{-19} C \cdot 8.2 \cdot 10^{-12} m^3 A^{-1} s^{-1}}$$

$$= 7.6 \cdot 10^{29} m^{-3} \quad [C^{-1} m^{-3} As = m^{-3}]$$

Uppgift 5b TIF400 / FYP330 version!

Fermienergi (simpler elektrongas)

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{(1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} (3\pi^2 7.6 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3})^{2/3} \\ &= \underline{4.8 \cdot 10^{-18} \text{ J}} = 30 \text{ eV} \end{aligned}$$

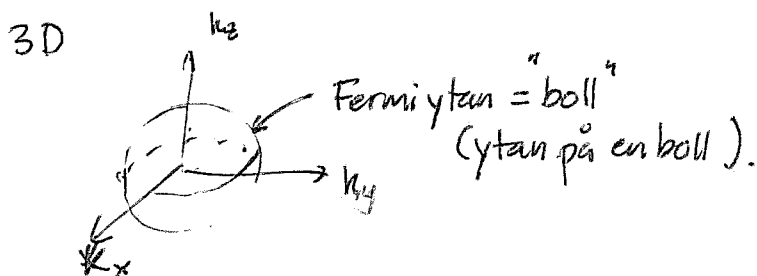
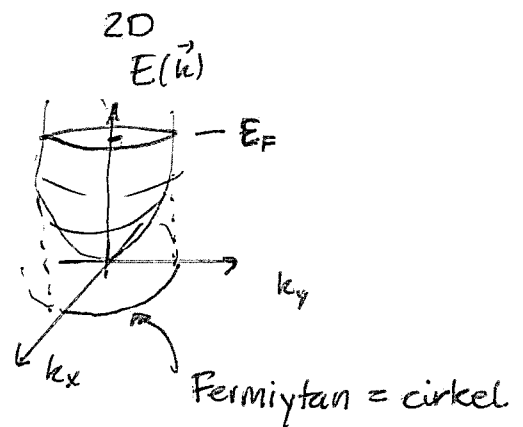
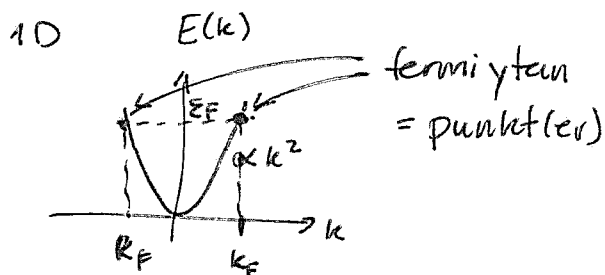
$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = (3\pi^2 7.6 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3})^{1/3} = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

Fermiytan är de värden i $\vec{k}$ för vilka $E(k) = \varepsilon_F$.

Fermiytan har dimension $d-1$ i $d=1, 2, 3$ och eftersom energin ges av

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

blir Fermiytan följande:



Uppgift 5b FFY012 version!

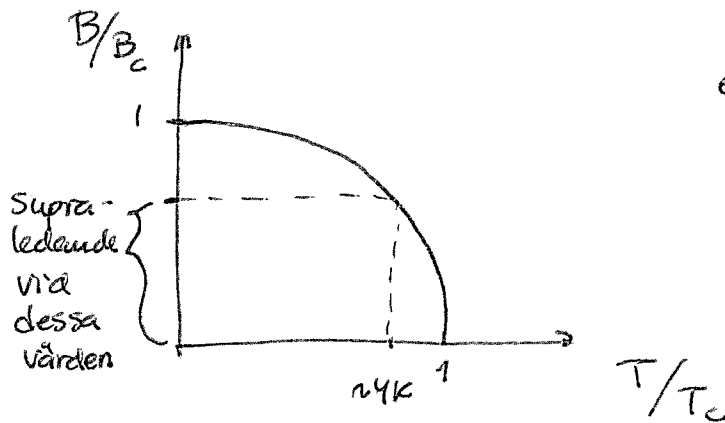
Metallen som supraleddare

$$B_c = 0,0803 \text{ T}, \quad T_c = 7,19 \text{ K}$$

$$T_c(B) = T_c(B=0) \left(1 - \frac{B}{B_c}\right)^{1/2}$$

eller

$$B = B_c \left(1 - \left(\frac{T_c(B)}{T_c(B=0)}\right)^2\right)$$



Maximala fältet vid temperatur $T = 4 \text{ K}$

$$B = 0,0803 \text{ T} \left(1 - \left(\frac{4 \text{ K}}{7,19 \text{ K}}\right)^2\right) = 0,0554 \text{ T}$$

Svar: Vid magnetfältet mindre än $0,055 \text{ T}$ är metallen supraleddande vid temperaturen 4 K .