Tentamen i Fasta tillståndets fysik (FFY012/FYP330)

Tid: em, 2023-08-17

Examinator: Eva Olsson (3247)

Lärare vid tentamen:

Frågorna 1 och 2, Eva Olsson (031 772 3247)

Fråga 3, Mattias Thuvander (073 143 3709)

Frågorna 4 och 5, Elsebeth Schröder (031 772 8424)

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, penna, sudd, passare, linjal, gradskiva, Chalmersgodkänd räknare i fickformat, utan inprogrammerad text/ekvationer relevant för tentamen, och ett egenproducerat handskrivet A4 (dubbelsidigt) med valfritt innehåll.

Bedömning: Max 100p. Betyg Chalmers: 3- 50p, 4- 70p, 5- 85p. Betyg GU: G- 50p, VG- 75p.

Skriv tydligt och motivera dina svar.

Lycka till!

Uppgift 1

Antag att Du har en kubisk struktur med kantlängden a. Placera in basen som beskrivs av atom A i (0,0,0) och atom B i (½,½,½).

a) Rita enhetscellen med markerade koordinataxlar x, y och z samt rita in atomerna. Markera (110)- och (001)-planen. **(5p)**

b) Ta fram uttrycket för de reciproka enhetsvektorerna samt rita det reciproka gittret och markera koordinataxlarna x, y och z, markera gitterpunkterna och ange kantlängderna på enhetscellen i det reciproka gittret. Redovisa hur Du tar fram enhetsvektorerna. **(10p)**

c) Beräkna packningstäheten uttryckt i atomer per ytenhet, nm^2, för (210)-planen om a=4,1 Å. Antag att $a=4r_A$ där r_A är radien hos atom A. **(5p)**

(Observera att uppgifterna kan lösas utan att de tidigare deluppgifterna har lösts.)

Uppgift 2

a) Ta fram uttrycket för strukturfaktorn för wolfram (W, BCC med a = 3,155 Å) och ange värdena uttryckt i formfaktorn, f_W, för olika h, k, l. **(10p)**

b) Antag en BCC-struktur i reella rummet med basen (0,0,0). Byt ut atomen i mitten av detta BCC-gittret mot en annan atom. Antag att atomen i mitten av

enhetscellen har formfaktorn f_m och den andra f_h. Ta fram uttrycket för strukturfaktorn och ange värdena uttryckt i formfaktorerna. Antag att f_m och f_h är proportionella mot atomnumret Z, dvs $f_i = CZ_i$ där C är en konstant.

(10p)

(Observera att uppgifterna kan i stort sett lösas utan att de tidigare deluppgifterna har lösts.)

Uppgift 3

a) Betrakta en oändligt lång en-dimensionell kedja av kolatomer. Antag att avståndet mellan två atomer är 2,46 Å och att interaktionen mellan två atomer kan beskrivas av en fjäder med fjäderkonstant 100 N/m (och att det bara finns interaktion mellan närmaste grannar). Rita upp dispersionsrelationen för gittersvängningar ungefärligt och sätt siffror och enheter på axlarna. Ange också den maximala fonon-energin i eV.

(10 p)

b) Antag nu att kedjan har en längd på 1,0 µm. Hur många tillåtna värden för vinkelfrekvensen finns det? Hur stor är den lägsta fonon-energin (bortsett från noll)? **(10 p)**

Uppgift 4

En halvledare har effektiva massor för ledningsband och valensband, $m_e^* = 0{,}8\ m_e$ och $m_h^* = 1{,}3\ m_e$, m_e är fria elektronmassan.

a) Då halvledaren inte är dopad mäter man vid T = 300 K elektrontätheten $n = 10^{18}\ m^{-3}$. Hur stort är halvledarens bandgap E_g? **(5p)**

b) Halvledaren n-dopas med donatortäthet $n_d = 10^{22}\ m^{-3}$. Bestäm elektron och håltätheten vid T = 300 K, om vi räknar med att alla donatorer är joniserade.

(5p)

c) Mobiliteten är $\mu_e = 0{,}1\ m^2/Vs$ och $\mu_h = 0{,}05\ m^2/Vs$ för elektroner och hål. Beräkna kvoten mellan dopade och odopade konduktiviteter ($\sigma_{dopad}/\sigma_{odopad}$), för den dopade och odopade halvledaren från frågorna (b) och (a). **(5p)**

d) Rita bandstrukturen för halvledaren i närheten av valensbandets topp och ledningsbandets botten i en dimension, där vi antar att topp/botten båda ligger i k = 0. Ta med relevanta enheter, och se till att krökningen på banden är kvalitativt korrekta. Visa dina beräkningar/argument du använder för att skapa figuren (korrekt figur utan redovisning av innehållet ger inga poäng).

(5p)

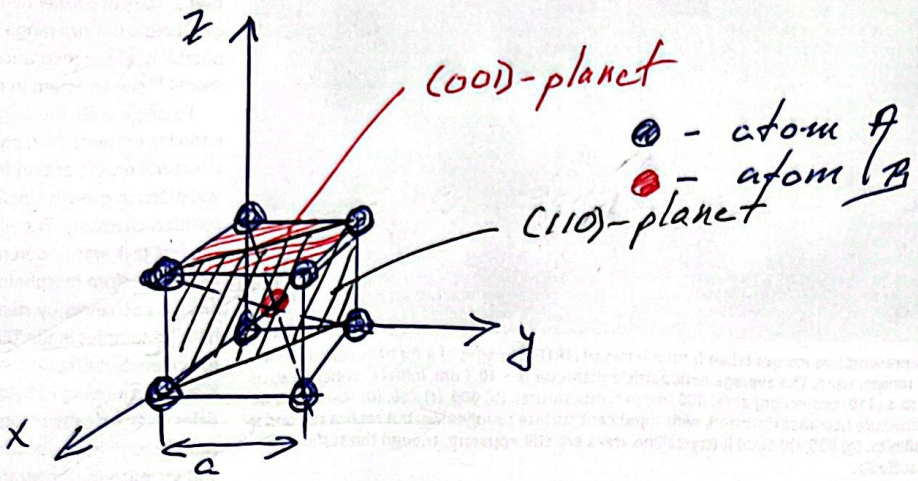
Uppgift 5

a) Vad menas när man säger att en supraledare är en ”perfekt diamagnet”? Hur uppstår denna ”diamagnetism” i en supraledare? Hur uppstår diamagnetism i material som inte är supraledare? Besvara med 3-6 tydligt skrivna hela meningar, och rita gärna även en skiss. **(10p)**

b) Fler egenskaper i supraledning har ett beroende på Debye-frekvensen ω_D, som ju är relaterad till jonernas rörelse. Samtidigt bildas Cooper-paren av elektroner. Varför är då en jon-relaterad frekvens som ω_D relevant i supraledning? Argumentera i hela och tydliga meningar, eventuellt också med skiss. Vad är ett Cooper-pars massa, laddning, och spinn? **(10p)**

Uppgift 1

a)



b) Reciproka gittervektorerna $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ och $\vec{b_3}$ ges av

$$\vec{b_1} = 2\pi \frac{\vec{a_2} \times \vec{a_3}}{\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} \times \vec{a_3}}$$

$$\vec{b_2} = 2\pi \frac{\vec{a_3} \times \vec{a_1}}{\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} \times \vec{a_3}}$$

$$\vec{b_3} = 2\pi \frac{\vec{a_1} \times \vec{a_2}}{\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} \times \vec{a_3}}$$

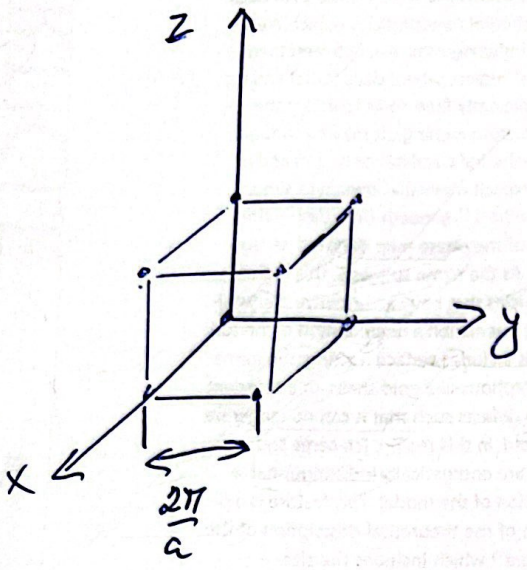
där $\vec{a_1} = a \cdot \vec{x}$, $\vec{a_2} = a\vec{y}$ och $a_3 = a\vec{z}$

$$\Rightarrow \quad \vec{b_1} = 2\pi \frac{a^2 \cdot \vec{x}}{a^3} = \frac{2\pi}{a}\vec{x}$$

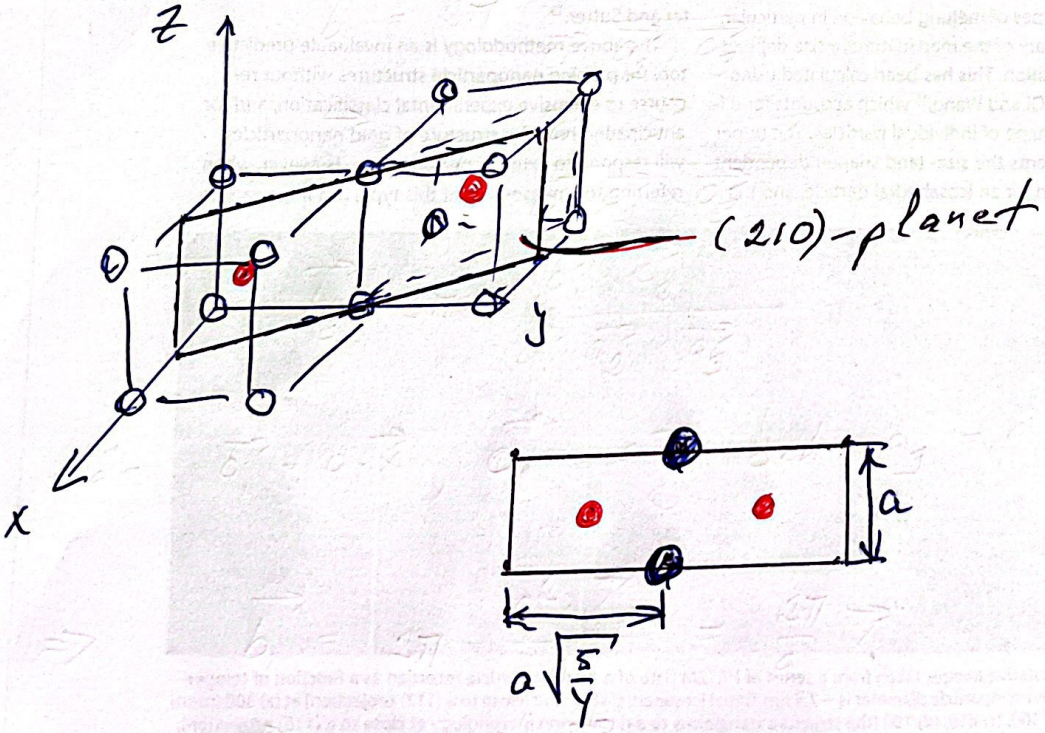
$$\vec{b_2} = 2\pi \frac{a^2 \cdot \vec{y}}{a^3} = \frac{2\pi}{a}\vec{y}$$

$$\vec{b_3} = 2\pi \frac{a^2 \vec{z}}{a^3} = \frac{2\pi}{a}\vec{z}$$

Scanned with CamScanner



c) (210)-planen



Antal atomer = 2+1=3

Area = $a^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

Antal atomer per nm^2 = $\frac{3}{a^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{3}{0{,}41^2 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} \cancel{nm^{-2}} = 11.42 \cdot nm^{-2}$

Scanned with CamScanner

Uppgift 2b

BCC med basen W i (0, 0, 0)
detta ger

$f = f_W$

strukturfaktorn

$S_{hkl} = \sum_{j=1}^{2} f_j \, e^{-i\boldsymbol{\pi G}\, \boldsymbol{r}_j} = f_W + f_W e^{-i\pi 1/2(h+k+l)}$

som är $2\, f_W$ om h+k+l är ett jämnt tal
0 om h+k+l är ett udda tal

Uppgift 2a

Enkel kubisk struktur med basen W i (0, 0, 0) och en annan atom kallad m I (1/2,1/2,1/2)

detta ger

$f_h = f_W \qquad f_m = f_W$

och strukturfaktorn

$S_{hkl} = \sum_{j=1}^{2} f_j \, e^{-i\boldsymbol{\pi G}\, \boldsymbol{r}_j} = f_W + f_m e^{-i\pi 1/2(h+k+l)}$

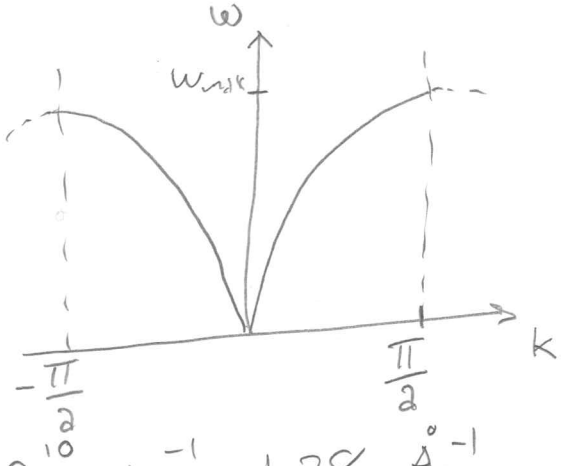
som är $f_W + f_m$ om h+k+l är ett jämnt tal
$f_W - f_m$ om h+k+l är ett udda tal

3 a) $\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$

$a = 2{,}46\,\text{Å}$

$\gamma = 100\ N/m$

$m = 12\,u$



$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2{,}46\cdot 10^{-10}} = 1{,}28\cdot 10^{10}\ m^{-1} = 1{,}28\ \text{Å}^{-1}$

$m = 12\,u = 12\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ kg = 1{,}99\cdot 10^{-26}\ kg$

$\omega_{max} = 2\cdot\sqrt{\frac{100}{1{,}99\cdot 10^{-26}}} = 1{,}42\cdot 10^{14}\ s^{-1}$

$E_{max} = \hbar\omega_{max} = 6{,}58\cdot 10^{-16}\cdot 1{,}42\cdot 10^{14}\ eV = 9{,}3\cdot 10^{-2}\ eV =$

$= \underline{\underline{93\ meV}}$

b) Man kan använda tillståndstätheten $g(k) = \frac{L}{2\pi}$, eller så vet vi att antalet tillstånd är $N_k = \frac{L}{a} = N - 1$

Antalet värden för ω blir hälften, så

$N_\omega = \frac{N_k}{2} = \frac{L}{2a} = \frac{1000}{2\cdot 0{,}246} \approx \underline{\underline{2033}}.$

Den minsta energin fås för $k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{1\cdot 10^{-6}} =$

$= 6{,}28\cdot 10^{6}\ m^{-1}$

Med $\sin x \approx x$

$E_{min} = \hbar\omega_{min} = 6{,}58\cdot 10^{-16}\cdot 2\sqrt{\frac{100}{1{,}99\cdot 10^{-26}}}\cdot\frac{6{,}28\cdot 10^{6}\cdot 2{,}46\cdot 10^{-10}}{2} =$

$= 7{,}2\cdot 10^{-5}\ eV = \underline{\underline{72\ \mu eV}}$

Uppgift 4 Halvledare, $m_e^* = 0{,}8\, m_e$, $m_h^* = 1{,}3\, m_e$.

a) Intrinsisk, $T = 300K$, $n = 10^{18}\, m^{-3}$. Bestäm E_g.

Massverkans.lag $\quad np = n_0 p_0 \exp(-E_g / k_B T)$

dvs

$$E_g = k_B T \ln\left(\frac{n_0 p_0}{n p}\right)$$

med $n = p$, och $\left.\begin{matrix} n_0 \\ p_0 \end{matrix}\right\} = 2\left(\frac{m_{e,h}^* k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2}$ (P.H.)

$$\cong 4{,}83 \cdot 10^{21}\, m^{-3} K^{-3/2} T^{3/2} \left(\frac{m_{e,h}^*}{m_e}\right)^{3/2}$$

Då fås

$$E_g = 0{,}026\, eV \ln\left(\frac{(4{,}83 \cdot 10^{21})^2\, 300^3\, (0{,}8 \cdot 1{,}3)^{3/2}\, m^{-3} \cdot 2}{(10^{18}\, m^{-3})^2}\right)$$

$$= \underline{0{,}89\, eV} \quad (0{,}88752\ldots).$$

b) Dopas med donatortäthet $n_d = 10^{22}\, m^{-3}$. Antag $n_d^+ = n_d$ (alla joniserade). Bestäm n och p.

Laddningsbevaring $\quad n = n_d^+ + p$

dvs

$$np = p n_d^+ + p^2 \qquad (*)$$

Antag p^2 liten (kontrollera sedan), dvs $np \approx p n_d^+$ ur vilket

$$p = \frac{np}{n_d^+} = \frac{(np)_{odopad}}{n_d^+} = \frac{10^{18} \cdot 10^{18}\, m^{-6}}{10^{22}\, m^{-3}} = \underline{10^{14}\, m^{-3}}$$

Är $p^2 \ll np$? $\quad p^2 = 10^{28}\, m^{-3}$, $np = 10^{36}\, m^{-3}$, ja: $p^2 \ll np$.

och $p \ll n_d^+$.

Då är $\quad n = n_d^+ + p \approx n_d^+ = \underline{10^{22}\, m^{-3}}$

Det går även att lösa (*) som en andra-ordningens ekvation i p, men insikten att p liten gör beräkningen enklare.

c) Mobilitet $\mu_e = 0{,}1\ m^2/Vs$, $\mu_h = 0{,}05\ m^2/Vs$. Bestäm $\sigma_{dop}/\sigma_{odop}$, σ konduktivitet.

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h$$

dopad: $n \gg p$ dvs $\quad (n_{dop.} = 10^{22}\ m^{-3})$

$$\sigma_{dopad} \cong ne\mu_e$$
$$= 10^{22}\ m^{-3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 0{,}1\ m^2/Vs$$
$$= 160\ /\Omega m$$

Enheter: $\dfrac{C\ m^2}{m^3\ Vs} = \dfrac{1}{m}\dfrac{A}{V} = \dfrac{1}{\Omega m}$ $\quad C/s = A \quad V = \Omega A$

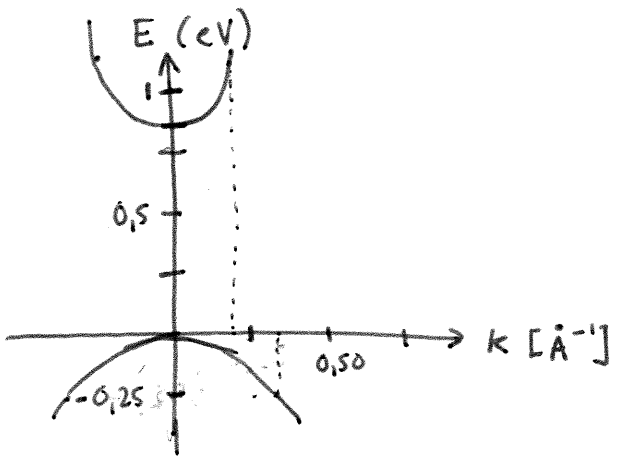
(men egl. inte nödvändigt i denna fråga)

odopad: $n = p$ dvs $\quad (n_{odop} = 10^{18}\ m^{-3})$

$$\sigma_{odopad} = ne(\mu_e + \mu_h)$$
$$= 10^{18}\ m^{-3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C \cdot (0{,}1 + 0{,}05)\ m^2/Vs$$
$$= 0{,}0240\ /\Omega m$$

$\sigma_{dop}/\sigma_{odop} = \dfrac{160}{0{,}240} = \underline{6658}$ dvs mycket bättre efter dopning.

d)



Antag $E_v = 0$

$m_e^* < m_h^*$ dvs störst krökning på ledningsbandet

$$\frac{1}{m_e^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2}{\partial k^2}E_\ell(k) = \frac{2a}{\hbar^2}$$

om $E_\ell(k) = ak^2 + E_g$.

Vi har $E_g = 0{,}88$ eV, störst krökning på ledningsbandet då $m_e^* < m_h^*$. För att estimera krökningen nära botten på ledningsbandet kan vi beräkna parametern a i $E_\ell(k) = ak^2 + E_g$ som gäller nära minimum,

$$a = \frac{\hbar^2}{2m_e^*} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-16}\,\text{eVs}\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{2\cdot 0{,}8\cdot 9{,}1\cdot 10^{31}\,\text{kg}}$$

$$= 4{,}8\cdot 10^{-20}\,\text{eVm}^2 \qquad \left[\frac{\text{sJs}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m}^2\text{s}^{-2}\text{s}^2}{\text{kg}} = \text{m}^2\right]$$

$$= 4{,}8\,\text{eVÅ}^2$$

pss för valensbandet $E_v = -bk^2 + 0$ dvs $\frac{1}{m_h^*} = \frac{2b}{\hbar^2}$ och

$$b = 2{,}9\,\text{eVÅ}^2.$$

(Ändring med 0,25 eV fås vid $k \hat{=} 0{,}23$ Å^{-1} för ledn.band
$k \simeq 0{,}29$ Å^{-1} för valensband

$ak^2 = 0{,}25$ eV $\qquad bk^2 = 0{,}25$ eV

$\Rightarrow k = 0{,}23$ Å^{-1}, $\Rightarrow k \simeq 29$ Å^{-1}.)

Uppgift 5

a) En diamagnet har $\chi_m < 0$ och i vanliga fall är $\chi_m \approx -10^{-5}$.
I en supraledare skapas en ytström som precis tar ut magnetfältet så att det ser ut som att $\chi_m = -1$ (perfekt diamagnetism), men av helt andra orsaker (ytströmmen) än i vanliga material.
I vanliga material uppstår diamagnetism genom kvantmekanisk växelverkan av elektronen med magnetfältet, vilket alltid finns men ibland "överskuggas" av t.ex. paramagnetism eller ferromagnetism.

b) Debye-frekvensen har med jonrörelserna att göra. Cooper-par bildas genom att en elektron attraherar de tröga jonerna en aning men snabbt vör sig vidare, en annan elektron som kommer till området attraheras dit då jonerna nu ligger lite närmare och ger djupare potential. De två elektronerna bildar ett Cooper-par.
Det behövs alltså en (trög) rörelse av jonerna för att skapa byggstenarna för supraledning: Cooper-paren. Detta avspeglas i Debye-frekvensen.

Cooperpar = elektron spinn ↑, k + elektron spinn ↓, -k

dvs

massa $= 2m_e = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ kg

laddning $= 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C

spinn = noll