Tentamen i Fasta tillståndets fysik (FFY012/FYP330)

Tid: 2021-06-10, kl. 14:00-18:00.

Examinator: Eva Olsson.

Lärare vid tentamen:

Frågorna 1 och 2, Eva Olsson (031 772 3247)

Fråga 3, Mattias Thuvander (073 143 3709)

Fråga 4 och 5, Elsebeth Schröder

Bedömning: Max 100p. Betyg Chalmers: 3- 50p, 4- 70p, 5- 85p. Betyg GU: G- 50p, VG- 75p.

Viktig information:

Skriv tydligt och motivera dina svar.

Spara alla papper med lösningar och även pdf-filen som Du skickar in.

Inför inlämningen:

Lösningar till tentan som kräver beräkningar, härledningar, figurer, diagram och liknande, skall lösas på papper, som vid en vanlig salstentamen, eller läsplatta.

- Märk varje papperssida tydligt med ditt namn, tentamensuppgiftens nummer och sidnummer.
- Scanna eller fotografera dina lösningar. Tänk på att ha god belysning och använd gärna en dokumentskannings-app, t.ex. CamScanner eller Genius Scan.
- Skapa ett dokument för Din tentamen.
- Namnge Ditt textdokument enligt FFY012/FYP330_DittNamn.pdf.
- Skicka in dina lösningar genom att ladda upp pdf-filen via Canvas innan tentamens sluttid.
- Inlämningen skall vara klar 18:00. Med tanke på att uppladdningen kan ta lite längre så kommer Canvas-portalen att vara öppen tills 18:30 men inte längre. Tiden är enligt den klocka som Canvas använder, det kan alltså mycket väl vara att det stängs någon minut tidigare, så allt vi kan lova är att det ska gå att lämna in tills kring 18:30. Då stänger Canvas och det går inte att lämna in senare.

I och med att du laddar upp dina lösningar till tentan intygar du att du gjort dessa lösningar själv utan att ta hjälp av någon annan person. Detta innebär att samarbete inte är tillåtet. Kontroll av plagiering kommer att utföras. Du får inte heller visa Dina lösningar för någon annan innan kl. 21:00 den 10e juni 2021.

Uppgift 1

(Observera att uppgifterna kan lösas utan att de tidigare deluppgifterna har lösts.) Antag att Du har en tetragonal struktur med kantlängderna a, b och c där b=a och c=3a. Placera in basen som beskrivs av atom A i (0,0,0) och atom B i (½, ½,½).

a) Rita enhetscellen med markerade koordinataxlar x, y och z samt rita in atomerna. Markera (210)- och (103)-planen. **(5p)**

b) Ta fram uttrycket för de reciproka enhetsvektorerna samt rita det reciproka gittret med koordinataxlarna x, y och z markerade. Redovisa hur Du tar fram enhetsvektorerna. **(10p)**

c) Beräkna packningstäheten uttryckt i atomer per ytenhet, nm^2, för (110)- och (111)-planen om a=3.8Å. **(5p)**

Uppgift 2

(Observera att uppgifterna kan lösas utan att de tidigare deluppgifterna har lösts.) Antag att Du tar upp ett diffraktogram från ett material som består av en kristallstruktur med en kubisk enhetscell. Kantlängden är 4.08 Å och Du använder röntgenstrålning med våglängden 1.54 Å.

a) Beräkna Braggvinklarna om atomerna i enhetscellen består av en guldatom och tre silveratomer. Guldatomen är placerad i (0,0,0). Silveratomerna är placerade i (½, ½, 0), (½,0, ½) och (0, ½,½). Ange alla Braggvinklar upp till 35° där Du erhåller intensitet. **(10p)**

b) Ta fram uttrycket för strukturfaktorn för den kubiska enhetscellen för ett material som består av 25% atomprocent guldatomer och 75% silveratomer och där atomerna är slumpvis placerade i positionerna (0,0,0), (½, ½, 0), (½,0, ½) och (0, ½,½) uttryckt i formfaktorerna för guld, f_{Au}, och silver, f_{Ag}. Ange villkoret på Millerindex hkl för att erhålla diffraktion. **(10p)**

Uppgift 3

Figur 1 nedan visar tillståndstätheten D(ω) som funktion av vinkelfrekvensen ω, för ett ämne enligt Debye-modellen.

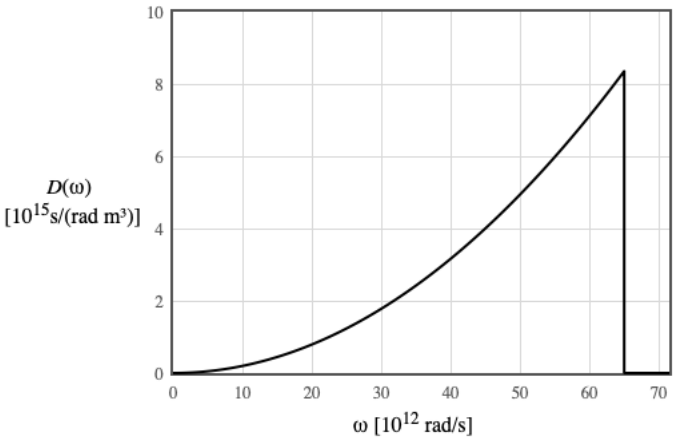
a) Hur stor är ω_D och Debye-temperaturen? **(5 p)**

b) Använd figur 1 för att bestämma ljudhastigheten i ämnet. **(5 p)**

c) Antag att ämnet är krom (Cr), som är BCC. Beräkna fjäderkonstanten för modellen med en en-dimensionell kedja av atomer med atomavstånd lika med det kortaste avståndet i verkligt krom. **(5 p)**

d) Använd dispersionsrelationen för en 1D atomkedja, och beräkna vågtalet för gittersvängningen (beloppet av k-vektorn i första Brillouinzon) som motsvaras av vinkelfrekvensen $\omega_D/10$. **(5 p)**

Dessa uppgifter (a-d) bygger på varandra, om du inte får fram något svar på en del, så kan du göra nästa uppgift med ett antaget, rimligt värde.



Figur 1.

Uppgift 4

Al som supraledare har den mycket låga kritiska temperaturen T_c = 1,175 K, och vid 0 K är kritiska magnetfältet $H_c(T = 0\text{ K}) = 0{,}01$ T, vid vanligt tryck.

a) Estimera det kritiska magnetfältet vid temperaturen T = 1,00 K. Vad händer vid magnetfält större än det kritiska? **(5p)**

b) Den långt övervägande delen av Al finns som isotopen ^{27}Al. Isotopen ^{26}Al är radioaktiv (med halveringstid på ~10^6 år) och den hittas bara som spårelement. Om vi trots det gör tankeexperimentet att vi skapar ett material uteslutande med ^{26}Al, vilken kritisk temperatur, vid vanligt tryck, har detta material då? **(5p)**

c) Vi skapar en cylinder av Al (med den vanliga isotopen ^{27}Al) med makroskopisk diameter (t.ex. 1 cm) och placerar det vid temperaturen 0 K i ett magnetfält som går i cylinderns riktning. Magnetfältet utan för cylindern är mindre än det kritiska magnetfältet. Estimera med metoder från kursen hur långt in i cylindern magnetfältet vi ska gå för att magnetfältet har gått ner till 1 % av magnetfältet utanför cylindern. Du kan antaga att tätheten av elektroner som ingår i Cooper-par år 10^{29} /m^3 för Al. **(5p)**

d) Fler egenskaper i supraledning har ett beroende på Debye-frekvensen ω_D. Samtidigt bildas ju Cooper-paren av två elektroner. Varför blir då en jon-relaterad frekvens som ω_D relevant i supraledning? Argumentera i hela och tydliga meningar, eventuellt också med skiss. **(5p)**

Uppgift 5

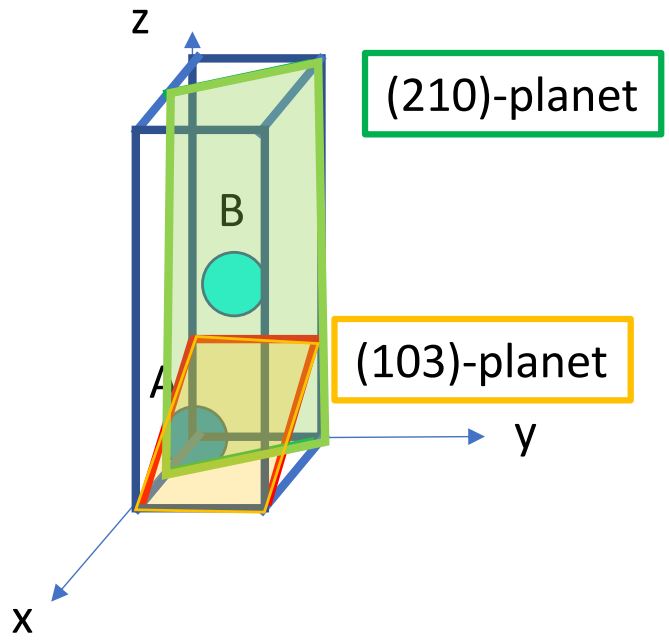
a) Vid 300 K, vad är sannolikheten att ett tillstånd är besatt om det är (i) 0,05 eV över Ferminenergin, (ii) 0,05 eV under Fermienergin, (iii) vid Fermienergin. **(5p)**

b) Al har tre valensatomer, och den vanligaste isotopen är ^{27}Al. Masstätheten är 2,7 g/cm^3, och tiden mellan en elektrons kollisioner med jonerna är i medel 4×10^{-14} s. Beräkna strömmen genom en 20 m lång Al ledning, med tvärsnittsarean 2 mm^2, när en potential på 3 V läggs över ledningen. **(5p)**

c) Vi beskriver Al med elektrongasmodellen (se värden som ges till fråga b)). Beräkna Fermivektorn, Fermienergin och Fermitemperaturen. *OBS: för fullt poäng krävs att du skriver vilka värden du använder i dina beräkningar, inte bara formel och resultat.* **(5p)**

d) För fria-elektrongas-modellen: beskriv i ord och/eller skissa Fermi"ytan" för systemer i 1, 2 och 3 dimensioner. Argumentera för dina svar. **(5p)**

Uppgift 1a



Uppgift 1b

Använd

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}$$

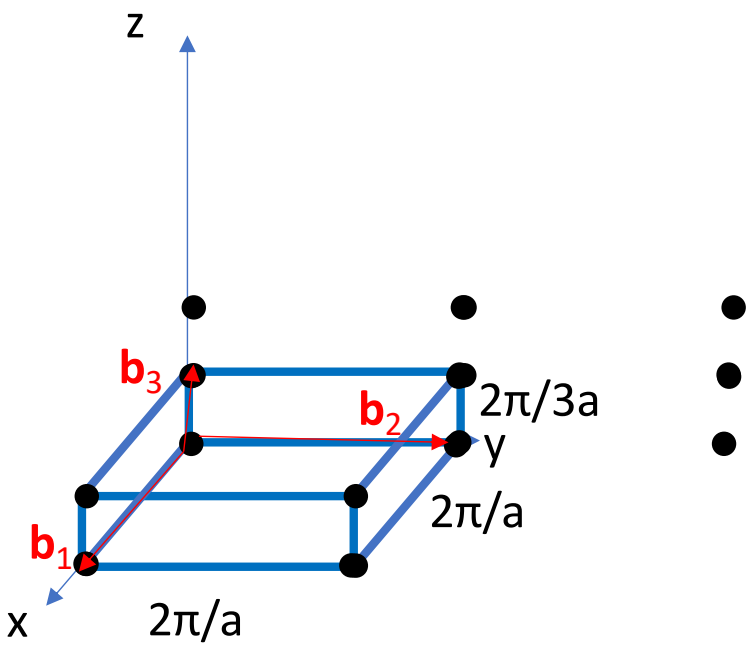
$$\vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}$$

$$\vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}$$

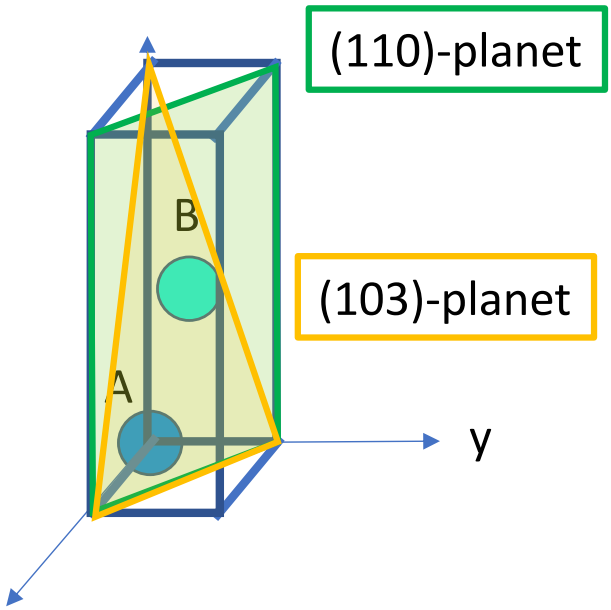
Vi får

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a^2 c} \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \frac{2\pi}{a} \hat{x} \\ \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a^2 c} \cdot \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \frac{2\pi}{a} \hat{y} \\ \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a^2 c} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \frac{2\pi}{c} \hat{z} \end{cases}$$

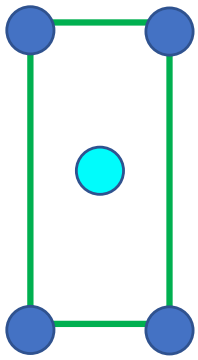
Där b=a och c=3a



Uppgift 1c



(110)-planet



Antal atomer: 2

Area: $3a\sqrt{2}a$

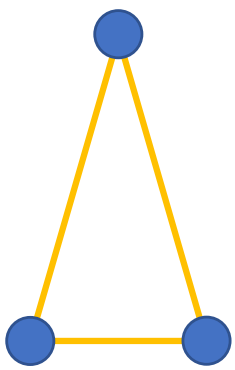
Packningstäthet: $2/(3\sqrt{2}\,a^2) =$ 3.3 atomer/nm^2

(103)-planet

Antal atomer: 0.5

Area: $0.5\sqrt{2}\,a\sqrt{(19/2)}\,a$

Packningstäthet: $0.5/(0.5(\sqrt{19}\,a^2))$ = 1.6 atomer/nm^2



Uppgift 2a

Braggvinklarna ges av Braggs lag $2d_{hkl} \sin\Theta = n\lambda$ där n = 1.
$d_{hkl} = a/ (h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}$ där a = 4.08 Å .
λ = 1.54 Å enligt uppgiften.
Alla hkl är tillåtna. Detta ger Braggvinklarna

{hkl}	Θ
100	10.9°
110	15.5°
111	19.1°
200	22.2°
210	25.0°
211	27.5°
220	32.3°
221, 300	34.5°

Uppgift 2b

Strukturfaktorn S_{hkl} :
FCC med basen (0.25Au + 0.75 Ag) i (0, 0, 0)
detta ger

(0.25Au + 0.75 Ag) i (0, 0, 0), (½, ½, 0), (½, 0, ½) och (0, ½, ½),

$f = f_{(0.25Au + 0.75 Ag)} = C\,(0.25\, Z_{Au} + 0.75\, Z_{Ag}) = C\,55$

$S_{hkl} = \sum_{j=1}^{4} f_j\, e^{-i\boldsymbol{\pi G}\, \boldsymbol{r}_j} = f + f e^{-i\pi(h+k)} + f e^{-i\pi(h+l)} + f e^{-i\pi(k+l)}$

som är $4f$ = 220 C om hkl alla är jämna tal eller alla udda tal
0 om hkl en blandning av udda och jämna tal

(3)

a) $\omega_D = \underline{\underline{65 \cdot 10^{12}\ s^{-1}}}$ (cut-off i diagrammet)

$$\Theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{13}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 495\ K \approx \underline{\underline{490\ K}}$$

b) Från diagrammet fås $D(\omega_D) \approx 8{,}4 \cdot 10^{15}\ s/m^3$

För Debye-modellen gäller, för tre grenar

$$g(\omega) = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v^3} = V D(\omega)$$

$$v = \left(\frac{3\omega_D^2}{2\pi^2 D(\omega_D)}\right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot (6{,}5 \cdot 10^{13})^2}{2\pi^2 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{15}}\right)^{1/3} =$$

$$= (7{,}6 \cdot 10^{10})^{1/3} = 4244\ m/s \approx \underline{\underline{4{,}2\ km/s}}$$

c) Från Physics Handbook, $a' = 2{,}91$ Å, bcc.
Kortaste atomavstånd $a = \sqrt{3} \cdot a'/2 = 2{,}52$ Å
$M = 52\ u = 8{,}6 \cdot 10^{-26}$ kg

$$v = a\sqrt{\frac{\gamma}{M}} \rightarrow \gamma = \frac{Mv^2}{a^2} = \frac{8{,}6 \cdot 10^{-26} \cdot 4244^2}{(2{,}52 \cdot 10^{-10})^2} = \underline{\underline{24{,}4\ N/m}}$$

d) $$\omega = 2\sqrt{\frac{\gamma}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| = \frac{2v}{a}\sin\frac{ka}{2}$$

$$\frac{\omega a}{2v} = \sin\frac{ka}{2}$$

$$k = \frac{2}{a}\arcsin\frac{\omega a}{2v} = \frac{2}{2{,}52 \cdot 10^{-10}}\arcsin\frac{6{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 2{,}52 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 4244} =$$

$$= 1{,}54 \cdot 10^{9}\ m^{-1} = 1{,}54\ nm^{-1}$$

Uppgift 4

Al som supraledare.

$T_c = 1{,}175\ K$

$H_c(T=0K) = 0{,}01\ T$

a) Estimera $H_c(T = 1{,}00K)$.

Approximativt gäller

$$H_c(T) = H_c(T=0)\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right) \qquad \text{(t.ex. Hofmann (10.1))}$$

dvs

$$H_c(T=1{,}00K) = 0{,}01\,T\left(1-\left(\frac{1{,}00}{1{,}175}\right)^2\right) \approx \underline{0{,}0028\ T}$$

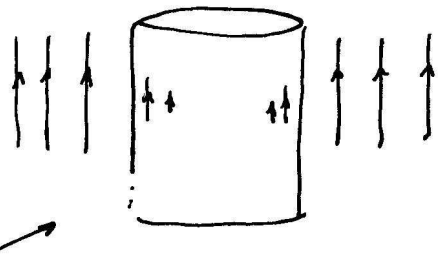
$H > H_c$: (många olika svar möjliga, men t.ex)
magnetfältet går nu igenom materialet, materialet inte längre supraledande

b) Gå från ^{27}Al till isotopen ^{26}Al, dvs massa/atom $M = 27u \to 26u$.

Isotopeffekten ger att $T_c \propto M^{-1/2}$ (ungefär; Hoffman avsnitt 10.1.3)

dvs
$$T_c^{26} \cong T_c^{27}\left(\frac{M_{27}}{M_{26}}\right)^{1/2} = T_c^{27}\sqrt{\frac{27}{26}} = \underline{1{,}197\ K}$$

c)



Supraledande cylinder

Täthet elektroner i Cooperpar

$n_s^e = 10^{29}\ m^{-3}$

Vi hade $\nabla^2\vec{B} = \dfrac{\mu_0 n_s^e e^2}{m_e}\vec{B}$

n_s^e = täthet elektroner i Cooperpar

m_e = elektronmassa

(Hofmann)

eller

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{\mu_0 n_s (2e)^2}{2m_e}\vec{B}$$

med

n_s = täthet Cooperpar, $n_s = \frac{1}{2}n_s^e$

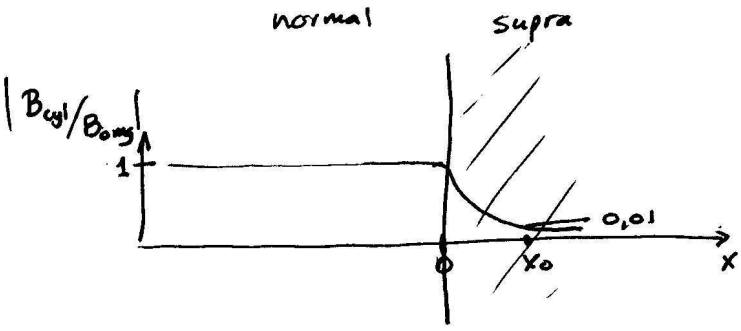
(Elsebeth anteckningar)

$\Rightarrow$ samma sak.

4c) fortsatt

Lösning $B_{cyl.} = B_{omgivning}\, e^{-x/\lambda_L}$ med $\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_s^e e^2}}$,

x avstånd från ytan.



Vill ha $\frac{B_{cyl}}{B_{omgiv.}} = 0.01 = e^{-x_0/\lambda_L}$

$\therefore$ $x_0 = \lambda_L \ln 100$ är avståndet från ytan

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_s^e e^2}} = \sqrt{\frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{4\pi\, 10^{-7}\,\text{Vs(Am)}^{-1}\; 10^{29}\,\text{m}^{-3}\,(1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{C})^2}}$$

$$= 1{,}68 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$$

dvs $x_0 = \underline{7{,}7 \cdot 10^{-8}\,\text{m}}$ dvs cirka 80 nm in i cylindern är magnetfälten bara 1% !

d) Debye-frekvensen har med jon-rörelserna att göra.

Cooperpar bildas av att en elektron attraherar de tröga jonerna en aning men rör sig snabbt därifrån, en annan elektron attraheras till området i stället då jonerna ligger lite tätare nu. På så sätt skapas ett Cooperpar. Till det behövs alltså rörelse också bland jonerna, vilket t.ex. Debye-frekvensen avspeglar.

(Se gärna Hofmann fig. 10.7).

Uppgift 5

a) Fördelningen av elektroner ges av Ferm-Dirac-fördelningen. $T = 300\,K$.

$$n_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/k_BT} + 1}$$

(i) $\varepsilon - \varepsilon_F = 0{,}05\ eV$

$$n_{FD}(\varepsilon = \varepsilon_F + 0{,}05eV) = \frac{1}{e^{0{,}05eV/0{,}0259eV} + 1} = \underline{0.13}$$

(ii) $$n_{FD}(\varepsilon = \varepsilon_F - 0{,}05eV) = \frac{1}{e^{-0.05/0.0259} + 1} = \underline{0.87}$$

(iii) $$n_{FD}(\varepsilon = \varepsilon_F) = \frac{1}{e^{0} + 1} = \underline{0.5}$$

b) Ström genom en Al ledning.

Resistivitet $\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau}$ med $\tau = 4 \cdot 10^{-14}\,s$; Längd $\ell = 20m$, Area $A = 2\,mm^2$, Spänning $V = 3V$

n = elektrontäthet

Masstäthet Al $m = 2{,}7\,g\,cm^{-3} = 2{,}7 \cdot 10^3\,kg\,m^{-3}$

Atommassa $M = 27\,u = 27 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg$

3 valenselektroner per atom. N_A = Avogadros tal

dvs $$n = \frac{m}{M} \cdot 3$$

$$= \frac{2{,}7 \cdot 10^3\,kg\,m^{-3}}{27 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} \cdot 3 = 1{,}8 \cdot 10^{29}\,m^{-3}$$

Resistivitet

$$\rho = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg}{1{,}8 \cdot 10^{29}\,m^{-3}\,(1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C)^2\,4 \cdot 10^{-14}\,s} = 4{,}9 \cdot 10^{-9}\ \Omega\,m$$

Ström $$I = \frac{V}{R} = V\frac{A}{\rho\ell} = 3V\,\frac{2 \cdot 10^{-6}\,m^2}{4{,}9 \cdot 10^{-9}\ \Omega\,m\ 20\,m} = \underline{61\,A}$$

5 c) Al har elektrontätheten $n = 1{,}8 \cdot 10^{29}\ m^{-3}$ (fråga b)

Fermivektor $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = (3\pi^2\, 1{,}8 \cdot 10^{29}\ m^{-3})^{1/3} = \underline{1{,}75 \cdot 10^{10}\ m^{-1}}$

Fermienergi $\varepsilon_F = \dfrac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi n)^{2/3}$

$$= \frac{1.05 \cdot 10^{-34}\ Js\ \ 6{,}58 \cdot 10^{-16}\ eVs}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg}(3\pi^2\, 1{,}8 \cdot 10^{29}\ m^{-3})^{2/3}$$

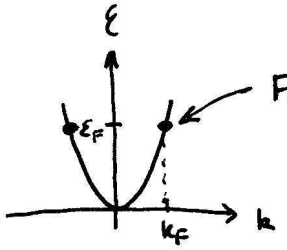
$$= \underline{11.6\ eV}$$

Fermitemperatur $T_F = \varepsilon_F / k_B = 11.6\ eV / (8{,}62 \cdot 10^{-5}\ eV K^{-1})$

$$= \underline{1{,}3 \cdot 10^5\ K}$$

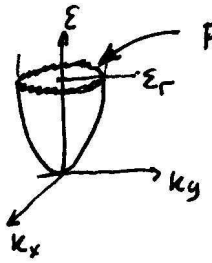
d) Fermiytor i fria-elektrongasmodellen:

1D



Fermiytan i 1D-modellen är en punkt (eller två, om man tar negativ k_F med)

2D



Fermi "ytan" i 2D-modellen är en cirkel

3D

Fermiytan i 3D-modellen är en sfär.

Fermiytan är positionerna i k-rummet där energin motsvarar "sista elektronens" energi. (dock inte vid bandgap).