Tentamen i Fasta tillståndets fysik

FFY012, FFY011, samt FYP330 (GU)

Tid och plats: torsdag 18/8, 2016, 14.00, SB.

Examinatorer:

Mats Granath, 7869026, 0723087160, mats.granath@gu.se
Maths Karlsson, 7728038, 0723526106, maths.karlsson@chalmers.se

Hjälpmedel: Penna, suddgummi, Beta, Physics Handbook, egen formelsamling på ett A4-blad (fram- och baksidan), typgodkänd räknare eller annan räknare i fickformat dock utan inprogrammerad text eller ekvationer av intresse för tentan.

Bedömning: Kursbetyget är baserat på summan av tentamenspoängen +40 % av duggapoängen. Gränserna är: 10p≤3<14p, 14p≤4<17p, 5≥17p. GU: 10p≤G<15p, VG≥15.

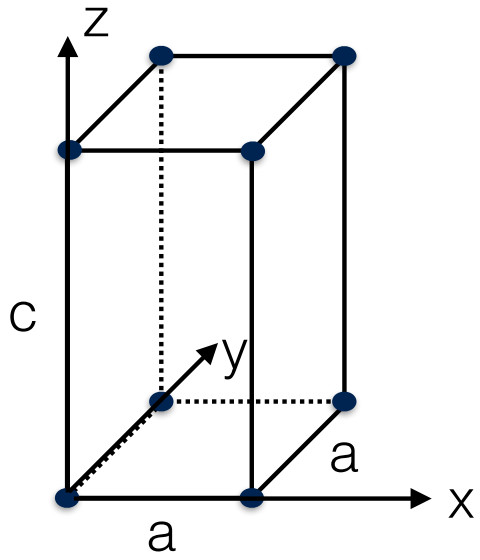
Rättningsgranskning: Tisdag 6/9 kl 12.30-13.00, i lunchrummet i Soliden plan 3.

Uppgift 1

En kristall med enkel kubisk struktur och gitterparametern a är skuren så att en yta är vinkelrätt mot [100]-riktningen. Visa i figur reflexionen mot ett (210)-plan samt ange vektorerna k (for infallande stråle) och k' (for den diffrakterade strålen) om den infallande strålen är vinkelrät mot provytan. Ange också $|k|$ för att diffraktion skall uppstå. (4p)

Uppgift 2

En stråle lågenergielektroner (40 eV) faller in ortogonalt mot (100)-ytan av en monoatomär tetragonal kristall med gitterparameterna $a = 3.7$ Å och $c = 4$ Å (Figur 1). Beräkna vinklarna mellan normalen och de diffrakterade strålarna? (4p)



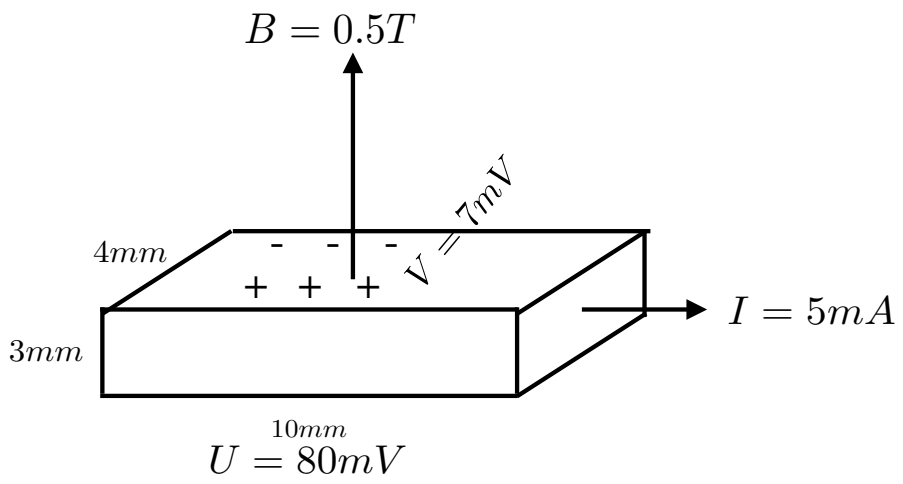
Figur 1: Enkel tetragonal kristall med $c > a$.

Uppgift 3

En rektangulär platta av en dopad halvledare har mått enligt figuren. En ström I =5mA leds igenom plattan och motsvarar ett spänningsfall av U = 80mV. Ett transversellt magnetfält B = 0.5T ger upphov till en spänning V = 7mV, vinkelrät mot både ström och magnetfält och med tecken enligt figur.

a) Använd informationen för att uppskatta täthet och tecken (elektroner eller hål) på laddningsbärarna. (2p)

b) Beräkna materialets resistivitet och mobilitet. (2p)



Figur 2: till Uppgift 3

Uppgift 4

Figuren representerar en (intrinsisk) halvledare (a) som under tryck övergår till en metall (b). Vad som visas är en förenklad bandstruktur uttryckt i termer av tillståndstäthet $D(\epsilon)$ som funktion av energi ϵ för två band. Antag T=0.

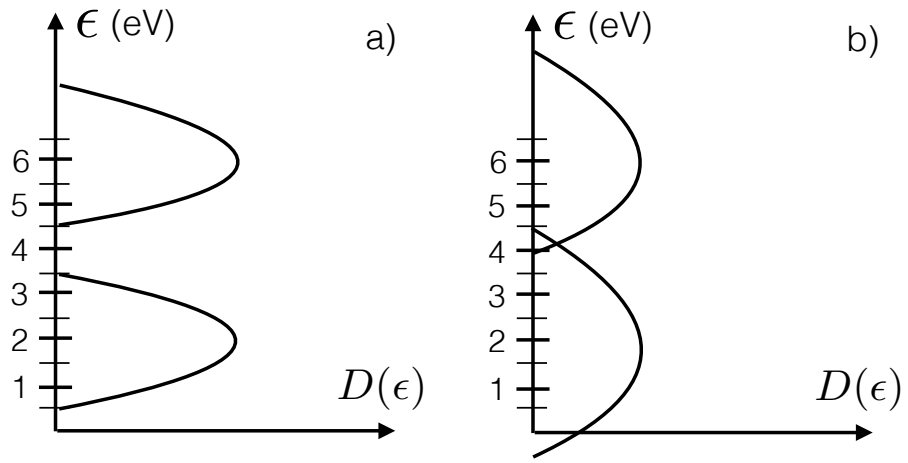
a) Vid atmosfärstryck är materialet en halvledare (Figur a). Det undre bandet (vid lägre energi) är fyllt med elektroner och det övre bandet är tomt. Med hjälp av figuren och relevant teori uppskatta Fermienergin. (1p)

b) Under högt tryck blir banden bredare och de börjar överlappa i energi (Figur b). Båda banden kan antas ha effektiv massa lika med fria elektronmassan.[1] Uppskatta Fermienergin. (1p)

[1] Detta gäller i kanten av banden där de kan beskrivas med en kvadratisk dispersion.

c) Utgående från svaret i b) beräkna tätheten av elektroner (enhet m^{-3}) i det övre bandet samt hål i det undre bandet. (1p)

d) Förklara kort (t.ex med utgångspunkt från tight-binding modellen) varför banden förväntas bli bredare (i energi) när ett material sätts under tryck. (1p)



Figur 3: till Uppgift 4

Uppgift 5

Ett elektronband har energi som funktion av gittervågtal

$$\epsilon(\vec{k}) = -2t[\cos(k_x a) + \cos(k_y a)] - 2t' \cos(k_z c)\,,$$

där a och $c > a$ är längder och $t > 0, t' \geq 0$ är energier.

a) Från uttrycket identifiera vilket område i $\vec{k}$-rummet som är den första Brillouinzonen (1sta BZ). (0.5p)

b) Identifiera och skissa ett Bravaisgitter som är konsekvent med ovan Brilloiunzon. (0.5p)

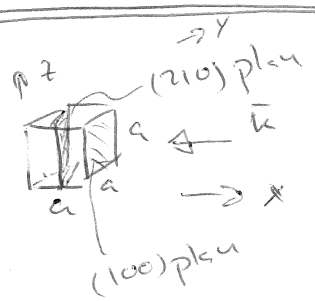
c) Antag att bandet är dopat med elektroner så att Fermienergin ges av $\epsilon_F = -3.5t$ och att $t' = 0$. Beräkna och skissa Fermiytan i 1sta BZ. (Tips. Det kan vara användbart att Taylorutveckla cosinus.) (1p)

d) Från (c), beräkna antalet elektroner per gitterpunkt i Bravaisgittret, som finns i bandet. (1p)

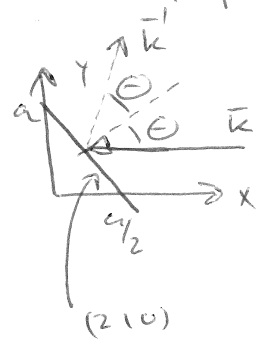
e) Samma som i uppgift (c), men antag nu $t' = 0.1t$. Skissa Fermiytan. (Tips. Studera några olika k_z värden, t.ex. $k_z = 0$ och $k_z = \pm\pi/c$, och ta fram ytan i k_x, k_y för dessa. Interpolera.) (1p)

Tenta 2016-08-18 — Lösningsförslag

(1)



Lägg ner xy-planet med pappret



Diffraktionsvillkor: $\bar{G} = \Delta\bar{k} = \bar{k}' - \bar{k}$

reciprok gittervektor som representerar planskaran (210)

$\bar{G} = \frac{2\pi}{a}(2,1,0)$

$\bar{k} = (-k, 0, 0)$

$\bar{k}' = ?$

$$\begin{cases} |\bar{k}'| = |\bar{k}| \\ \bar{k}' = \bar{G} + \bar{k} = \frac{2\pi}{a}(2,1,0) + -k(1,0,0) = \left(\frac{4\pi}{a} - k, \frac{2\pi}{a}, 0\right) \end{cases}$$

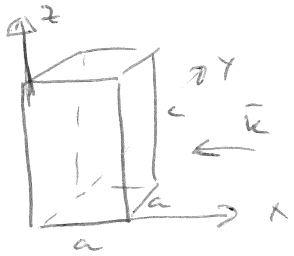
$$\begin{cases} |\bar{k}'| = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{a} - k\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{16\pi^2}{a^2} - \frac{8\pi}{a}\cdot k + k^2 + \frac{4\pi^2}{a^2}} \\ |\bar{k}| = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{16\pi^2}{a^2} - \frac{8\pi}{a}\cdot k + \cancel{k^2} + \frac{4\pi^2}{a^2} = \cancel{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{20\pi^2}{a^2} = \frac{8\pi}{a}\cdot k \Rightarrow \frac{20\pi}{8a} = k \Rightarrow \frac{5\pi}{2a} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{k} = \left(-\frac{5\pi}{2a}, 0, 0\right) \\ \bar{k}' = \left(\frac{3\pi}{2a}, \frac{2\pi}{a}, 0\right) \end{cases}$$

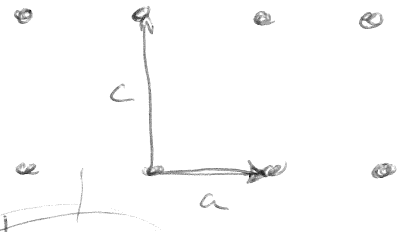
(2) Lågenergielektroner (40 eV) → Tränger inte in i materialet ⇒ Ser bara ytan



$c > a$, $a = 3.7\,\text{Å}$, $c = 4\,\text{Å}$

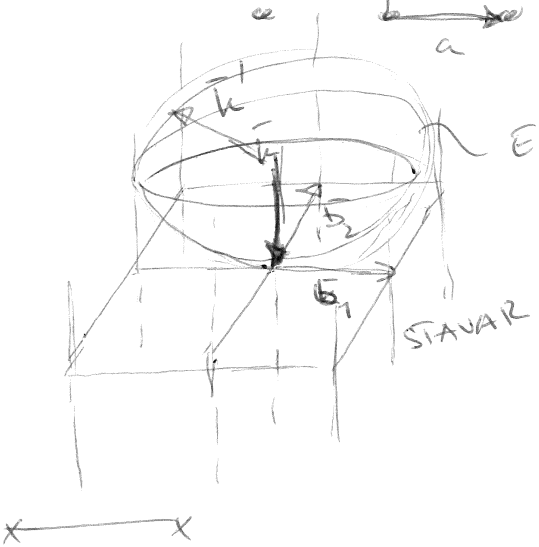
Vinkeln mellan normalen och de diffrakterade strålarna?

Vi kollar på yz-ytan (dvs i $-\bar{k}$-riktningen)



Rektangulärt gitter i 2D

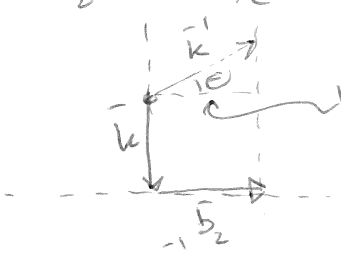
Gittervektorer
$$\begin{cases} \bar{a}_1 = a\hat{y} \\ \bar{a}_2 = c\hat{z} \\ \bar{a}_3 = \infty\hat{x} \end{cases}$$



Reciprokt gitter
$$\begin{cases} \bar{b}_1 = \frac{2\pi}{c}\hat{y} \\ \bar{b}_2 = 2\pi/c\,\hat{z} \\ \bar{b}_3 = 0\,\hat{x} \end{cases}$$

$\bar{k} = ?$ $\quad E = 40\,\text{eV} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k = 3.24\,\text{Å}^{-1}$

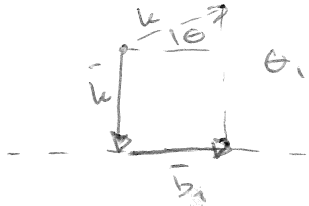
$$\begin{cases} |\bar{b}_1| = 2\pi/a = 1.698\,\text{Å}^{-1} \\ |\bar{b}_2| = 2\pi/c = 1.571\,\text{Å}^{-1} \end{cases}$$



$|\bar{k}'|\sin\theta = |\bar{k}|\sin\theta = |\bar{b}_2|$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{|\bar{b}_2|}{|\bar{k}|} \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{1.571}{3.24}\right) = 29^\circ$

$\sin\theta_2' = \frac{2|\bar{b}_2|}{|\bar{k}|} \Rightarrow \theta_2' = \arcsin\left(\frac{2\cdot 1.571}{3.24}\right) = 75.87^\circ$



$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1.698}{3.24}\right) = 31.6^\circ$

$\sin\theta_1' = \frac{2|\bar{b}_1|}{|\bar{k}|}$ funkar ej

$\sin\theta_2'' = \frac{3|\bar{b}_2|}{|\bar{k}|}$ ej

Uppg. 2

Diagonalen $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\bar{b}_1|^2 + |\bar{b}_2|^2}$

Dvs. $\sin \theta_3 = \dfrac{\sqrt{|\bar{b}_1|^2 + |\bar{b}_2|^2}}{|\bar{k}|}$

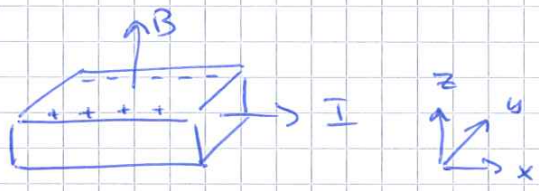
$$\sin \theta_3 = \frac{(1.698^2 + 1.571^2)^{1/2}}{3.24} \Rightarrow \theta_3 = \underline{\underline{45.56^\circ}}$$

Dubbla diagonale, $\sin \theta_3' = \dfrac{2\sqrt{(\bar{b}_1)^2 + (\bar{b}_2)^2}}{|\bar{k}|}$ Funkar ej.

<u>Svar:</u>
$$\begin{cases} \theta_1 = 29^\circ \\ \theta_2 = 31.6^\circ \\ \theta_3 = 45.6^\circ \\ \theta_4 = 75.9^\circ \end{cases}$$

(3) a) använd $R_H = \frac{1}{nq}$ $\quad q = \pm e$

där $R_H = \frac{E_y}{j_x B}$ i standard geometri



vi kan direkt (från $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}$) se att halvledaren är <u>håldopad</u>.

$E_y = \frac{7\,mV}{4\,mm} = \frac{7}{4}\frac{V}{m}$ $\quad (E_y > 0)$

$j_x = I/(3\,mm \times 4\,mm) = \frac{5}{12}\cdot 10^3 \frac{A}{m^2}$

$\therefore \boxed{n = \frac{1}{R_H e} = 7.4\cdot 10^{20}\ m^{-3}}$

b) $\rho = \frac{1}{\sigma}$ $\quad j_x = \sigma E_x$ $\quad E_x = \frac{80\,mV}{10\,mm} = 8\frac{V}{m}$

res. $\rho = \frac{E_x}{j_x} = 1.92\cdot 10^{-2}\,\Omega m = 1.92\,\Omega cm$

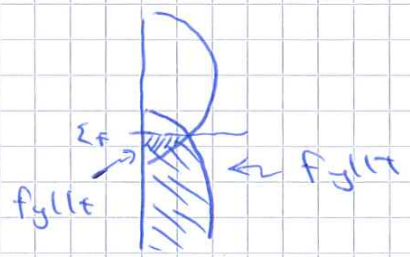
mob. $\mu = \frac{1}{\rho n e} = 0.43\,\frac{m^2}{Vs}$

(4) a) halvledare $\mu = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_h^*}{m_e^*} \overset{T=0}{=} \frac{E_g}{2}$

$$\therefore \boxed{\varepsilon_F \approx 4\,eV}$$

b) Eftersom båda banden har samma DOS krävs för att bevara partikelantalet:

$$\boxed{\varepsilon_F \approx 4.25\,eV}$$



c)

Övre bandet $N = \int_0^{0.25\,eV} d\varepsilon\, D(\varepsilon)$

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(0.25\,eV)^{3/2} \approx$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \approx 3.8\,eV\,\mathring{A}^2$$

$$n \approx 5.69 \cdot 10^{26}\ 1/m^3$$

och $p = n$

d) När kristallen trycks ihop ~~ka~~ överlappar atomorbitalerna mer (atomerna närmare).

I tight-binding blir ~~ett~~ hopping-parametern ("t" eller "γ") större.

Bandet går över ett större energispann

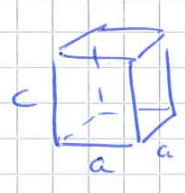
$$\left[\text{Ex } \varepsilon(k) = -2t\left[\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right]\right]$$

(5) $\varepsilon(\vec{k}) = -2t\left[\cos k_x a + \cos k_y a\right] - 2t' \cos k_z c$

a) periodicitet i $\vec{k}$ $\quad k_x \to k_x + \frac{2\pi}{a}$ $\quad k_y \to k_y + \frac{2\pi}{a}$, $k_z \to k_z + \frac{2\pi}{c}$

1BZ: $\quad k_x, k_y \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ $\quad k_z \in \left[-\frac{\pi}{c}, \frac{\pi}{c}\right]$

b) konsekvent med ~~ett~~ tetrogonalt gitter



c) Fermiytan: $\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_F$ $\quad$ här oberoende av k_z

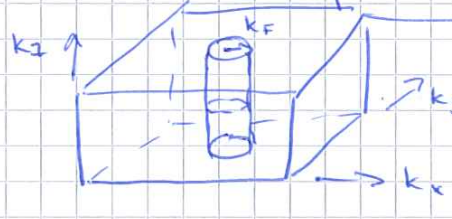
$$-2t\left[\underbrace{\cos k_x a + \cos k_y a}_{\text{maximalt } = 2 \text{ för } k_x = k_y = 0}\right] = -3.5t$$

$\Rightarrow$ vi behöver små $k_x k_y$

$$-2t\left[\cos k_x a + \cos k_y a\right] \approx -4t + t\left[(k_x a)^2 + (k_y a)^2\right] = -3.5t$$

$$(k_x a)^2 + (k_y a)^2 = 0.5$$

cirkulär yta $\boxed{k_F = \frac{\sqrt{0.5}}{a}}$



Fermi-ytan är en tub med radie k_F

d) Volym innanför Fermiytan: $V_{FS} = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{0.5}{a^2} = \frac{\pi}{a^2 c}$

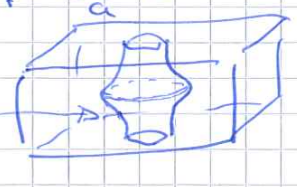
$\therefore$ $\frac{1}{8\pi^2}$ del av 1BZ är fylld

fylld BZ $\Leftrightarrow$ 2e / cell $\Leftrightarrow$ $\therefore$ $\boxed{\frac{1}{4\pi^2} \approx 0.025}$ elektron per cell (eller gitt. pkt.)

e) $t' = 0.1t$ $\quad k_z = \pm\frac{\pi}{2}\frac{1}{a} \Leftrightarrow$ samma yta som i c

som i c) $k_z = 0 \Leftrightarrow -2t\left[\cos k_x a + \cos k_y a\right] - \underbrace{2t'}_{0.2t} = -3.5t$

$\Rightarrow (k_x a)^2 + (k_y a)^2 = 0.7$ $\quad \Rightarrow k_F = \frac{\sqrt{0.7}}{a}$ ← bredare

$k_z = \pm\frac{\pi}{a}$ $\Rightarrow k_F = \frac{\sqrt{0.3}}{a}$ ← smalare

Fermiyta