

Kvantfysik

Tentamen August 2025

Kurs: TIF395

Tid: 2025/08/18, 1400 – 1800

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (4 poäng) Ange två egenskaper av Hermitska operatorer och förklara varför dessa två behövs för att sådana operatorer kan representera fysikaliska storheter inom kvantfysik.
- (b) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende respektive den tidsoberoende Schrödinger-ekvationerna?
- (c) (1 poäng) Ange en skillnad mellan *bundna* och *spridnings*-tillstånd.
- (d) (1 poäng) Vilket experimentellt bevis finns för att ljus kan bete sig som partiklar?
- (e) (2 poäng) En mätning av ett kvantsystem visar att systemet har en viss energi E . Stämmer det att systemet hade energi E redan innan mätningen? Förklara ditt svar.



2. En elektron är bunden i en endimensionell, kvadratisk potential med naturlig frekvens ω_0 . Om ljus faller in på elektronen kan den hoppa från energinivån n_1 till n_2 och avge (eller absorbera) ljus i form av en foton. Övergången är tillåten om matriselementet

$$M_{n_1, n_2} = \langle n_2 | \hat{x} | n_1 \rangle \quad (1)$$

är nollskilt.

- (a) (3 poäng) Bestäm matriselementet för en godtycklig övergång $n_1 \rightarrow n_2$ ($n_1 \neq n_2$). Ange vilka övergångar är tillåtna.
- (b) (2 poäng) Vad händer med vågfunktionens paritet i en tillåten övergång? Förklara varför en harmonisk oscillators energieigenfunktioner har bestämd paritet.
- (c) (1 poäng) Anta att vi har många sådana brunnar med fjäderkonstant $k = 10.8 \text{ N/m}$. Vilka våglängder av ljus ska absorberas av elektronerna?
- (d) (4 poäng) Hur mycket potentiell energi förlorar elektronen när den faller från en högre till en lägre nivå? Bestäm den genomsnittliga förändringen för en godtycklig, men tillåten, övergång $n_1 \rightarrow n_2$ ($n_2 < n_1$).

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

3. En elektron har spinnstillståndet

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle \quad (2)$$

vid $t = 0$, där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att elektronen är spinn-upp respektive spinn-ner med avseende på z -axeln. Hamiltonianen är

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \quad (3)$$

där ω_c är reell och positiv.

- (a) (3 poäng) Bestäm elektronens spinnstillstånd vid en allmän tidspunkt t .
- (b) (1 poäng) Vad är sannolikheten att erhålla spinn-upp om vi mäter spinnet i z -ledet, S_z , vid tidspunkt $t = T$?
- (c) (4 poäng) Vad är sannolikheten att erhålla spinn-upp vid $t = T$ om vi först mäter S_z vid $t = T/2$?
- (d) (2 poäng) Förändras sannolikheten i (c) om vi inte tittar på resultatet av den första mätningen? Förklara ditt svar.



4. En partikel med massa m och laddning q är instängd i en låda, $-a/2 < x < a/2$. Ett svagt elektriskt fält E_0 tillämpas på partikeln så att Hamiltonianen inuti lådan blir $\hat{H}' = qE_0x$.

- (a) (1 poäng) Förklara varför första ordningens korrigering till energieigenvärdet är noll för alla energinivåer.
- (b) (5 poäng) Det störda grundtillståndet kan uppskattas med första ordningens störningsteori. Det går att visa att:

$$|\psi_g\rangle = |E_1\rangle + \alpha_2 |E_2\rangle + \alpha_3 |E_3\rangle + \dots \quad (4)$$

där $|E_n\rangle$ är ett ostört energiegentillstånd. Bestäm konstanterna α_2 och α_3 .

Tips: $\int_0^{\pi/2} x \cos x \sin 2x \, dx = 4/9$.

- (c) (3 poäng) Skissa vågfunktionerna som motsvarar det ostörda respektive det störda grundtillståndet och förklara det du finner.
- (d) (1 poäng) Uppskatta sedan hur starkt det elektriska fältet kan vara innan störningsteori slutar att gälla.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

5. Vågfunktionen (i sfäriska koordinater) som beskriver elektronen i en väteatom är

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{r \cos \theta}{a_0^{5/2}} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \quad (5)$$

där a_0 är Bohr-radien.

(a) (3 poäng) Visa att vågfunktionen är korrekt normerad.

Tips: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ om n är ett heltal.

(b) (2 poäng) Vad är elektronens totala energi och beloppet av dess banrörelsemängdsmoment?

(c) (4 poäng) Bestäm väntevärdet av elektronens radiella rörelseenergi.

(d) (1 poäng) Hur skulle du pröva dina svar i (c) experimentellt?



6. Tillståndet som beskriver två partiklar, en med $s = 1$ och en annan med $s = \frac{1}{2}$, är

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} |1, 0\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |1, 1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle, \quad (6)$$

där $|s, m_s\rangle$ är ett spinttillstånd med kvanttal s, m_s .

(a) (2 poäng) Är partiklarna ”sammanflätade” eller inte? Förklara vad ”sammanflätning” innebär.

(b) (2 poäng) Om en mätning ger att partikeln med $s = \frac{1}{2}$ är spinn-upp, vad är de möjliga utfallen och motsvarande sannolikheter av en mätning av den andra partikels spinprojektion i z -ledet?

(c) (4 poäng) Vi bestämmer oss för att mäta spinnbeloppet av det hela systemet, dvs. längden av den totala spinnvektorn. Vad är sannolikheten att vi får som utfall $|\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}| = \sqrt{3}\hbar/2$?

(d) (2 poäng) Mätningen ger faktiskt att $|\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}| = \sqrt{3}\hbar/2$. Bestäm sannolikheten att en följande mätning ska ge att partikeln med $s = \frac{1}{2}$ är spinn-upp.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

7. Två partiklar med massa m är bundna i en endimensionell, kvadratisk potential med naturlig frekvens ω_0 . Den ena partikeln hamnar i grundtillståndet och den andra i det första exciterade tillståndet. Partiklarna har identiska spinnkvanttal.

(a) (2 poäng) Ange kvanttillståndet som beskriver båda partiklar om partiklarna är...

- i. osärskiljbara bosoner,
- ii. osärskiljbara fermioner.

Du behöver inte ge spinnberoendet.

(b) (6 poäng) Visa att väntevärdet av det kvadrerade avståndet mellan partiklarna är

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0} \times \begin{cases} 1 & \text{osärskiljbara bosoner,} \\ 3 & \text{osärskiljbara fermioner.} \end{cases} \quad (7)$$

(c) (2 poäng) Förklara varför det finns en skillnad mellan de två fallen i (b).

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1				
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0		
$1/2$	$1/2$	1	0	0		
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1	
			$-1/2$	$-1/2$	1	

tabell-
förklaring: S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$				
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$		
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$		
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$
					-1	$-1/2$
						1

Kvantfysik

Tentamen August 2025

Lösningsförslag

Kurs: TIF395

Tid: 2025/08/18, 1400 – 1800

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (4 poäng) Ange två egenskaper av Hermitska operatorer och förklara varför dessa två behövs för att sådana operatorer kan representera fysikaliska storheter inom kvantfysik.

Lösning: Alla egenvärden av en Hermitska operator är reella och egenvektorer som tillhör olika egenvärden är ortogonala. Dessa behövs så att egenvärden kan representera de numeriska utfallen av en mätning och så att tillstånd som beskriver olika fysikaliska utfall inte överlappar med varandra, vilket betyder att upprepade mätningar ger samma utfall.

- (b) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende respektive den tidsoberoende Schrödinger-ekvationerna?

Lösning: Alla kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende Schrödinger-ekvationen ($\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle$). Det är bara energiegenstillstånd som uppfyller den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen, $\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$.

- (c) (1 poäng) Ange en skillnad mellan *bundna* och *spridnings*-tillstånd.

Lösning: Vågfunktionen $\psi(x)$ som beskriver ett bundet tillstånd måste försvinna när $x \rightarrow \pm\infty$, men detta gäller inte spridningstillstånd.

- (d) (1 poäng) Vilket experimentellt bevis finns för att ljus kan bete sig som partiklar?

Lösning: Den fotoelektriska effekten.

- (e) (2 poäng) En mätning av ett kvantsystem visar att systemet har en viss energi E . Stämmer det att systemet hade energi E redan innan mätningen? Förklara ditt svar.

Lösning: Nej, i allmänhet. Om vi tror på experiment om Bells olikhet hade energin före mätningen inget bestämt värde alls. Värdet skapades vid mätning när tillståndet kollapsade.

2. En elektron är bunden i en endimensionell, kvadratisk potential med naturlig frekvens ω_0 . Om ljus faller in på elektronen kan den hoppa från energinivån n_1 till n_2 och avge (eller absorbera) ljus i form av en foton. Övergången är tillåten om matriselementet

$$M_{n_1, n_2} = \langle n_2 | \hat{x} | n_1 \rangle \quad (1)$$

är nollskild.

- (a) (3 poäng) Bestäm matriselementet för en godtycklig övergång $n_1 \rightarrow n_2$ ($n_1 \neq n_2$). Ange vilka övergångar är tillåtna.

Lösning: Först, uttryck operatoren $\hat{x}$ i termer av stegoperatorer: $\hat{x} = L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$.

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2} &= L \langle n_2 | \hat{a} + \hat{a}^\dagger | n_1 \rangle \\ &= L\sqrt{n_1} \langle n_2 | n_1 - 1 \rangle + L\sqrt{n_1 + 1} \langle n_2 | n_1 + 1 \rangle \\ &\neq 0 \text{ om } n_2 = n_1 \pm 1. \end{aligned}$$

Endast övergångar där huvudkvanttalet förändras med ± 1 är tillåtna.

- (b) (2 poäng) Vad händer med vågfunktionens paritet i en tillåten övergång? Förklara varför en harmonisk oscillators energieigenfunktioner har bestämd paritet.

Lösning: Pariteten byter tecken i en tillåten övergång. Energieigenfunktionerna har bestämd paritet eftersom potentialen är symmetrisk omkring $x = 0$ och paritetsoperatoren kommuterar med Hamiltonianen.

- (c) (1 poäng) Anta att vi har många sådana brunnar med fjäderkonstant $k = 10.8 \text{ N/m}$. Vilka våglängder av ljus ska absorberas av elektronerna?

Lösning: Det går att absorbera bara de fotoner som har energi $\hbar\omega_0 = \hbar\sqrt{k/m} = 2.3 \text{ eV}$, vilket motsvarar $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 550 \text{ nm}$.

- (d) (4 poäng) Hur mycket potentiell energi förlorar elektronen när den faller från en högre till en lägre nivå? Bestäm den genomsnittliga förändringen för en godtycklig, men tillåten, övergång $n_1 \rightarrow n_2$ ($n_2 < n_1$).

Lösning: Bestäm väntevärdet av $V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ med hjälp av stegoperatorerna:

$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 L^2 \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \dots | n \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{4}(2n+1) = \frac{E_n}{2} \\ \implies \Delta V(n \rightarrow n-1) &= \frac{\hbar\omega_0}{2}.\end{aligned}$$

3. En elektron har spinnstillståndet

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle \quad (2)$$

vid $t = 0$, där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att elektronen är spinn-upp respektive spinn-ner med avseende på z -axeln. Hamiltonianen är

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \quad (3)$$

där ω_c är reell och positiv.

(a) (3 poäng) Bestäm elektronens spinnstillstånd vid en allmän tidpunkt t .

Lösning: Hamiltonianen i matrisform är $\hat{H} = \hbar\omega_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, med egenvärden $E = \pm\hbar\omega_c$ och egenvektorer $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Skriv om begynnelsevillkoret,

$$|\psi; t=0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle}{\sqrt{2}},$$

och lägg till wiggle-faktorer:

$$|\psi; t\rangle = \frac{|\rightarrow\rangle e^{-i\omega_c t} + |\leftarrow\rangle e^{i\omega_c t}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left[e^{-i\omega_c t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\omega_c t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

(b) (1 poäng) Vad är sannolikheten att erhålla spinn-upp om vi mäter spinnet i z -ledet, S_z , vid tidpunkt $t = T$?

Lösning: $P = |\langle\uparrow|\psi; t\rangle|^2 = \cos^2(\omega_c t)$. (Märk att $P = 1$ om $t = 0$!)

- (c) (4 poäng) Vad är sannolikheten att erhålla spinn-upp vid $t = T$ om vi först mäter S_z vid $t = T/2$?

Lösning: Vid första mätningen får vi spinn-upp med sannolikhet $P = \cos^2(\omega_c T/2)$, enligt logiken i (a). Tillståndet kollapsar till $|\psi; t = T/2\rangle = |\uparrow\rangle$. Sannolikheten att återfå spinn-upp vid andra mätningen är då $P(\uparrow | \uparrow) = \cos^2(\omega_c T/2)$.

Den andra möjligheten är att vi får spinn-ned vid första mätningen. Detta sker med sannolikhet $P = \sin^2(\omega_c T/2)$ och tillståndet omedelbart därefter är $|\psi; t = T/2\rangle = |\downarrow\rangle$. Med det här begynnelsevillkoret blir det tidsberoende tillståndet (om vi återställer klockan!)

$$|\psi; t\rangle = \frac{|+\rangle e^{-i\omega_c t} - |-\rangle e^{i\omega_c t}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left[e^{-i\omega_c t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{i\omega_c t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

och sannolikheten att erhålla spinn-upp $T/2$ senare är $P(\uparrow | \downarrow) = \sin^2(\omega_c T/2)$.

Det slutliga resultatet är

$$P(\uparrow \text{ vid } t = T) = P(\uparrow | \uparrow) + P(\uparrow | \downarrow) = \cos^4(\omega_c T/2) + \sin^4(\omega_c T/2).$$

- (d) (2 poäng) Förändras sannolikheten i (c) om vi inte tittar på resultatet av den första mätningen? Förklara ditt svar.

Lösning: Nej! Det är själva mätningen som påverkar systemet och orsakar kollapsen, inte att vi tittar på resultatet.

4. En partikel med massa m och laddning q är instängd i en låda, $-a/2 < x < a/2$. Ett svagt elektriskt fält E_0 tillämpas på partikeln så att Hamiltonianen inuti lådan blir $\hat{H}' = qE_0x$.

- (a) (1 poäng) Förklara varför första ordningens korrigering till energiegenvärdet är noll för alla energinivåer.

Lösning: Första ordningens korrigering är störningens väntevärde, men störningen är udda och alla energiegenfunktioner har bestämd paritet (då potentialen är symmetrisk). I så fall är sannolikhetstätheten jämn för alla energinivåer och väntevärdet samt korrigeringen försvinner.

- (b) (5 poäng) Det störda grundtillståndet kan uppskattas med första ordningens störningsteori. Det går att visa att:

$$|\psi_g\rangle = |E_1\rangle + \alpha_2 |E_2\rangle + \alpha_3 |E_3\rangle + \dots \quad (4)$$

där $|E_n\rangle$ är ett ostört energiegentillstånd. Bestäm konstanterna α_2 och α_3 .

Tips: $\int_0^{\pi/2} x \cos x \sin 2x \, dx = 4/9$.

Lösning: Energiegenvärdena är $E_n = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2ma^2)$. Energiegenfunktioner är $\psi_n = \langle x | E_n \rangle = \sqrt{1/a} \cos(n\pi x/a)$ om $n = 1, 3, 5, \dots$ samt $\psi_n = \sqrt{1/a} \sin(n\pi x/a)$ om $n = 2, 4, 6, \dots$. Vid första ordningen har vi att korrigeringen till tillståndet är

$$|E_1^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq 1} \alpha_k |E_k\rangle, \quad \alpha_k = \frac{\langle E_k | \hat{H}' | E_1 \rangle}{E_1 - E_k}.$$

Börja med α_2 :

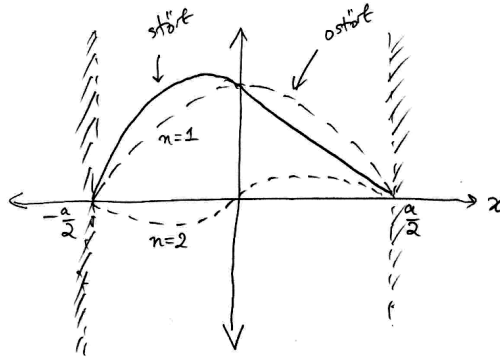
$$\begin{aligned} \langle E_2 | \hat{H}' | E_1 \rangle &= \frac{qE_0}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) x \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \\ &= \frac{qE_0 a}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y \cos y \sin 2y \, dy \quad \text{med } y = \pi x/a \\ &= \frac{8qE_0 a}{9\pi^2} \quad \text{med tipsen} \\ E_1 - E_2 &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (1 - 2^2) \\ \Rightarrow \alpha_2 &= -\frac{16qE_0 m a^3}{27\pi^4 \hbar^2}. \end{aligned}$$

och fortsätt med α_3 :

$$\begin{aligned} \langle E_3 | \hat{H}' | E_1 \rangle &= \frac{qE_0}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)}_{\text{jämn}} \underbrace{x}_{\text{udda}} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}_{\text{jämn}} dx = 0 \\ \Rightarrow \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

- (c) (3 poäng) Skissa vågfunktionerna som motsvarar det störda respektive det störda grundtillståndet och förklara det du finner.

Lösning: Det störda grundtillståndet blir förskjutet till vänster, där energin är lägre.



- (d) (1 poäng) Uppskatta sedan hur starkt det elektriska fältet kan vara innan störningsteori slutar att gälla.

Lösning: Till exempel, vi behöver $|\alpha_2| < 1$ för att korrigeringen ska vara en korrigering:

$$\frac{16qE_0ma^3}{27\pi^4\hbar^2} < 1 \implies E_0 \lesssim 100 \frac{\hbar^2}{qma^3}.$$

5. Vågfunktionen (i sfäriska koordinater) som beskriver elektronen i en väteatom är

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{r \cos \theta}{a_0^{5/2}} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \quad (5)$$

där a_0 är Bohr-radien.

(a) (3 poäng) Visa att vågfunktionen är korrekt normerad.

Tips: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ om n är ett heltal.

Lösning: ”Korrekt normerad” betyder att integralen $\mathcal{I} = \iiint |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{32\pi a_0^5} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{r^2 \cos^2 \theta e^{-r/a_0}}_{\text{sannolikhetstäthet}} \underbrace{r^2 \sin \theta}_{\text{volymelement}} \\ &= \frac{1}{16a_0^5} \int_0^\infty r^4 e^{-r/a_0} dr \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx \int_{-1}^1 u^2 du \quad \text{med } x = r/a_0, \quad u = \cos \theta \\ &= \frac{1}{16} 4! \frac{2}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) (2 poäng) Vad är elektronens totala energi och beloppet av dess banrörelsemängdsmoment?

Lösning: Slå upp vågfunktionen i handboken för att identifiera kvanttalen $n = 2$, $\ell = 1$ och därmed att $E = -\mathcal{R}/4 = -3.4 \text{ eV}$, $L = \sqrt{2}\hbar$.

- (c) (4 poäng) Bestäm väntevärdet av elektronens radiella rörelseenergi.

Lösning: Operatoren ska klämmas mellan vågfunktionen och dess adjunkt är

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{p}_r^2}{2m} &= -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
 \frac{\hat{p}_r^2}{2m} \psi &= -\frac{\cos \theta}{4\sqrt{2\pi}a_0^{5/2}} \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0} \right] \\
 &= -\frac{\cos \theta}{4\sqrt{2\pi}a_0^{5/2}} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{a_0} + \frac{r}{4a_0^2} \right) e^{-r/2a_0} \\
 \psi^* \frac{\hat{p}_r^2}{2m} \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{32\pi a_0^5} \cos^2 \theta \left(2 - \frac{2r}{a_0} + \frac{r^2}{4a_0^2} \right) e^{-r/a_0} \\
 \langle T_r \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{32\pi a_0^5} \int_0^\infty r^2 \left(2 - \frac{2r}{a_0} + \frac{r^2}{4a_0^2} \right) e^{-r/a_0} dr \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta}_{2/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \\
 &= -\frac{\hbar^2}{48ma_0^2} \int_0^\infty \left(2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{4} \right) e^{-x} dx \\
 &= -\frac{\hbar^2}{48ma_0^2} (2 \times 2! - 2 \times 3! + 3!) \\
 &= \frac{\hbar^2}{24ma_0^2} = \frac{\mathcal{R}}{12} = 1.13 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

- (d) (1 poäng) Hur skulle du pröva dina svar i (c) experimentellt?

Lösning: Mät den radiella rörelseenergin en gång hos många väteatomer som har samma kvanttal och bestäm genomsnittet.

6. Tillståndet som beskriver två partiklar, en med $s = 1$ och en annan med $s = \frac{1}{2}$, är

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \quad (6)$$

där $|s, m_s\rangle$ är ett spintillstånd med kvanttal s, m_s .

- (a) (2 poäng) Är partiklarna "sammanflätade" eller inte? Förklara vad "sammanflätning" innebär.

Lösning: De är sammanflätade, då resultatet av en mätning av en partikel påverkar sannolikheterna som gäller den andra.

- (b) (2 poäng) Om en mätning ger att partikeln med $s = \frac{1}{2}$ är spinn-upp, vad är de möjliga utfallen och motsvarande sannolikheterna av en mätning av den andra partikelns spinprojektion i z -ledet?

Lösning: Det enda termen som bidrar är den första, så tillståndet direkt efter mätningen blir $|\Psi'\rangle = |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Man erhåller $S_z = 0$ med 100% sannolikhet.

- (c) (4 poäng) Vi bestämmer oss för att mäta spinnbeloppet av det hela systemet, dvs. längden av den totala spinnektorn. Vad är sannolikheten att vi får som utfall $|\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}| = \sqrt{3}\hbar/2$?

Lösning: Skriv om tillståndet i termer av $|S, M_S\rangle$, dvs. tillstånd där *paret* har bestämt spinn:

$$\begin{aligned} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ \Rightarrow |\Psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}\right) |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \underbrace{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}_{\text{sökt utfall}} \\ \Rightarrow P &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{12} + \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.99 \end{aligned}$$

- (d) (2 poäng) Mätningen ger faktiskt att $|\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}| = \sqrt{3}\hbar/2$. Bestäm sannolikheten att en följande mätning ska ge att partikeln med $s = \frac{1}{2}$ är spinn-upp.

Lösning: Mätningen kollapsar tillståndet till

$$|\Psi'\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}} |1, 1\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}} |1, 0\rangle \otimes \underbrace{|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle}_{\text{sökt utfall}}$$
$$\Rightarrow P = 1/3$$

7. Två partiklar med massa m är bundna i en endimensionell, kvadratisk potential med naturlig frekvens ω_0 . Den ena partikeln hamnar i grundtillståndet och den andra i det första exciterade tillståndet. Partiklarna har identiska spinnkvanttal.

(a) (2 poäng) Ange kvanttillståndet som beskriver båda partiklar om partiklarna är...

i. osärskiljbara bosoner,

$$\textbf{Lösning: } |\Psi\rangle = (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)/\sqrt{2}$$

ii. osärskiljbara fermioner.

$$\textbf{Lösning: } |\Psi\rangle = (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)/\sqrt{2}$$

Du behöver inte ge spinnberoendet.

(b) (6 poäng) Visa att väntevärdet av det kvadrerade avståndet mellan partiklarna är

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0} \times \begin{cases} 1 & \text{osärskiljbara bosoner,} \\ 3 & \text{osärskiljbara fermioner.} \end{cases} \quad (7)$$

Lösning: Expandera operatoren $(x_1 - x_2)^2$ och kom ihåg att x_1 och x_2 kommuterar då de tillhör olika Hilbertrum: $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_1$.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 |\Psi\rangle &= \frac{L}{\sqrt{2}} \left[|1\rangle \otimes |1\rangle \pm (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) \otimes |0\rangle \right] \\ \hat{x}_1^2 |\Psi\rangle &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} \left\{ (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) \otimes |1\rangle \pm \left[|1\rangle + \sqrt{2}(\sqrt{2}|1\rangle + \sqrt{3}|3\rangle) \right] \otimes |0\rangle \right\} \\ &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes |1\rangle \pm 3|1\rangle \otimes |0\rangle + \text{termer som försvinner vid inreprodukten ...} \right) \\ \hat{x}_2 \hat{x}_1 |\Psi\rangle &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} \left[|1\rangle \otimes (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) \pm (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) \otimes |1\rangle \right] \\ &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |0\rangle \pm |0\rangle \otimes |1\rangle + \dots) \\ \hat{x}_2^2 |\Psi\rangle &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} (3|0\rangle \otimes |1\rangle \pm |1\rangle \otimes |0\rangle + \dots) \end{aligned}$$

Nu samlar vi:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 |\Psi\rangle &= \frac{L^2}{\sqrt{2}} \begin{cases} 2|0\rangle \otimes |1\rangle + 2|1\rangle \otimes |0\rangle, & \text{osärskiljbara bosoner} \\ 6|0\rangle \otimes |1\rangle - 6|1\rangle \otimes |0\rangle, & \text{osärskiljbara fermioner} \end{cases} \\ \Rightarrow \langle \Psi | (x_1 - x_2)^2 | \Psi \rangle &= \frac{L^2}{2} \begin{cases} 2 + 2, & \text{osärskiljbara bosoner} \\ 6 + 6, & \text{osärskiljbara fermioner} \end{cases} \end{aligned}$$

som önskat.

- (c) (2 poäng) Förklara varför det finns en skillnad mellan de två fallen i (b).

Lösning: Fermioner lyder Paulis exklusionsprincip, som säger att två osärskiljbara fermioner inte får ockupera samma kvanttillstånd. Då båda fermioner har identiska spinnkvanttal är det förbjudet att de har samma positioner. Vågfunktionen måste försvinna om $x_1 = x_2$, i motsats till fallet av två osärskiljbara bosoner, där vågfunktionen är som störst när $x_1 = x_2$. Väntevärdet $\langle x_1 - x_2 \rangle^2$ är följaktligen mindre för fermioner än bosoner.

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1				
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0		
$1/2$	$1/2$	1	0	0		
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1	
			$-1/2$	$-1/2$	1	

tabell-
förklaring:

S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$				
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$		
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$		
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$
					-1	$-1/2$
						1