

Kvantfysik

Tentamen Januari 2025

Kurs: TIF395

Tid: 2025/01/09, 0830 – 1230

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende respektive den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen?
- (b) (2 poäng) En mätning visar att ett kvantsystems energi är E_n . Kan man säga att systemets energi *innan* mätningen var E_n ? Förklara för vilka förutsättningar ditt svar gäller.
- (c) (2 poäng) En Hermitsk operator $\hat{Q}$ som representerar någon fysikalisk storhet kommuterar med Hamiltonianen $\hat{H}$. Vad betyder detta för $\hat{Q}$:s egentillstånd, $\{|q_n\rangle\}$, och dess väntevärde, $\langle Q \rangle$?
- (d) (2 poäng) Vad är vågfunktionerna i positionsbasen och rörelsemängdsbasen, $\psi(x)$ respektive $\tilde{\psi}(p)$, av en partikel med bestämd rörelsemängd $p = p_0$?
- (e) (2 poäng) En partikels vågfunktion är given av $\psi(x) = N$ om $|x| < L/2$ och 0 annars. Din kollega Dr Knowitall påstår att det finns ett unikt värde för N . Har den gode doktorn rätt eller inte? Förklara ditt svar.



2. Partiklar med massa m och energi E skickas från $x = -\infty$ mot ett potentialsteg:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Energien uppfyller $0 < E < V_0$.

- (a) (2 poäng) Ange vilka randvillkor vågfunktionen och dess första derivata uppfyller vid $x = 0$ och förklara varför dessa randvillkor behövs.
- (b) (4 poäng) Lös den tidsberoende Schrödinger-ekvationen för vågfunktionen $\psi(x)$ med hjälp av randvillkoren i (a). Medan du inte behöver normera vågfunktionen, eliminera så många konstanter som du kan.
- (c) (2 poäng) Efter vilket avstånd in i steget, $L_{1/2}$, har sannolikhetstätheten att partikeln ska hittas vid x minskat till hälften av den vid $x = 0$?
- (d) (2 poäng) En mätning visar att partikelns position är någonstans i området $0 < x < L_{1/2}$. Hur är detta möjligt om partikelns energi är mindre än potentialstegets höjd?

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

3. En partikel med massa m är bunden i en endimensionell kvadratisk potentialbrunn med naturlig frekvens ω_0 . Den är störd av en väldigt smal potential $\hat{H}' = -\alpha\delta(x)$, där $\alpha > 0$.

Vågfunktionerna som motsvarar de första tre ostörda energiegentillstånd är:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right) \times \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x/L, & n = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(x/L)^2 - 1], & n = 2 \end{cases} \quad (2)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- (2 poäng) Bestäm första ordningens korrigering till grundtillståndets energi.
- (2 poäng) Vad är första ordningens korrigering till det första exciterade tillståndets energi, och varför?
- (4 poäng) Det störda grundtillståndet $|E_g\rangle$ kan uttryckas i termer av de ostörda energiegentillstånd $|n\rangle$ som $|E_g\rangle \simeq |0\rangle + A|2\rangle + \dots$. Bestäm konstanten A .
- (2 poäng) Med hjälp av ditt svar i (c), skissa vågfunktionerna som motsvarar det ostörda grundtillståndet respektive det störda. Förklara det du finner.



4. En elektron har spintillståndet

$$|\psi\rangle = |\downarrow\rangle \quad (3)$$

vid $t = 0$, där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att elektronen är spinn-upp respektive spinn-ner med avseende på z -axeln. Hamiltonianen är

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \quad (4)$$

där ω_c är reell och positiv.

- (3 poäng) Bestäm elektronens spintillstånd vid allmän tidspunkt t . Skriv ditt svar i termer av $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$.
- (6 poäng) Vad är sannolikheterna att erhålla spinn-upp eller spinn-ner om vi mäter vid allmän tidspunkt t :
 - spinn i x -ledet, S_x ?
 - spinn i y -ledet, S_y ?
 - spinn i z -ledet, S_z ?
- (1 poäng) Beskriva spinnets rörelse fysikaliskt.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

5. Vågfunktionen som beskriver elektronen i en väteatom är,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}} \frac{r \sin \theta}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0} + i\phi\right), \quad (5)$$

där a_0 är Bohr-radien och vi använder sfäriska koordinater r, θ, ϕ .

(Om du använder handboken i denna uppgift, förklara hur.)

(a) Vad blir utfallet om vi mäter...

- i. (1 poäng) ... elektronens totala energi?
- ii. (1 poäng) ... banrörelsemängdsmomentets belopp, $|\mathbf{L}|$?
- iii. (1 poäng) ... banrörelsemängdsmomentets projektion längs z -axeln?

(b) (5 poäng) Bestäm väntevärdena $\langle \varrho^2 \rangle$ och $\langle z^2 \rangle$, där $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) (2 poäng) Skissa orbitalen som ek. 5 definierar och ge en beskrivning av elektronens rörelse.



6. Din kollega Dr Knowitall poängterar att elektronen i en väteatom har både banrörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$ och spinn $\mathbf{S}$, vilka kan kombineras i det totala rörelsemängdsmomentet $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Elektronen har inledningsvis bestämda $J^2 = 3\hbar^2/4$, $J_z = \hbar/2$ och $L^2 = 2\hbar^2$.

- (a) (4 poäng) Vad är de möjliga utfallen och motsvarande sannolikheter som gäller en mätning av banrörelsemängdsmomentets projektion längs z -axeln, L_z ?
- (b) (5 poäng) Vi mäter L_z och sedan J^2 . Vad är sannolikheten att vi återfår det ursprungliga värdet av J^2 ?
- (c) (1 poäng) Förklara varför sannolikheten du hittade i b) inte är lika med 1.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

7. Deutschs algoritm bestämmer om en funktion f , som ger antingen 0 eller 1 som output, är *konstant* eller *balanserad*. ”Konstant” betyder att funktionen ger samma output oavsett input, $f(x) = 1, \forall x$ eller $f(x) = 0, \forall x$. ”Balanserad” betyder att funktionen ger 1 för hälften av alla möjliga x och 0 för den andra hälften.

Algoritmen funkar på följande sätt för en en-bit f (*one-bit*, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1$):

1. Dataregistret x och kontrollregistret y är laddade med qubitarna $|0\rangle$ respektive $|1\rangle$: $|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$.
2. En Hadamard grind tillämpas på båda qubitarna: $|\Psi\rangle = \hat{U}_H |0\rangle \otimes \hat{U}_H |1\rangle$.
3. Funktionen tillämpas så att kontrollregistret blir $y' = [y + f(x)] \bmod 2$.
4. En till Hadamard grind tillämpas på dataregistret.

Tips: Kvantbit-tillståndena och Hadamard-operatoren i beräkningsbasen är givna av:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

- (a) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 3, för någon konstant f och någon balanserad f .
 - (b) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 4, för samma fall som i (b).
 - (c) (1 poäng) Givet (c), hur skulle vi bestämma om funktionen är konstant eller balanserad?
- ”No cloning” teoremet förbjuder att det existerar en unitär operator som kan kopiera ett godtyckligt kvanttillstånd $|\psi\rangle$.
- (e) (1 poäng) Varför måste operatoren vara unitär?
 - (f) (3 poäng) Bevisa ”no cloning” teoremet.
 - (g) (1 poäng) Varför är detta viktigt för kvantkommunikation?

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1			
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0	
$1/2$	$1/2$	1	0	0	
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1
			$-1/2$	$-1/2$	1

tabell-
förklaring:

S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$				
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$		
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$		
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$
					-1	$-1/2$
						1

Kvantfysik

Tentamen Januari 2025

Lösningsförslag

Kurs: TIF395

Tid: 2025/01/09, 0830 – 1230

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende respektive den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen?

Lösning: Alla kvanttillstånd uppfyller TBSE. Endast energiegentillstånd uppfyller TOSE.

- (b) (2 poäng) En mätning visar att ett kvantsystems energi är E_n . Kan man säga att systemets energi *innan* mätningen var E_n ? Förklara för vilka förutsättningar ditt svar gäller.

Lösning: Nej, generellt. Men om man redan har mätit energin och erhållit E_n kan man säga att systemet har energi E_n innan en följande mätning.

- (c) (2 poäng) En Hermitsk operator $\hat{Q}$ som representerar någon fysikalisk storhet kommuterar med Hamiltonianen $\hat{H}$. Vad betyder detta för $\hat{Q}$:s egentillstånd, $\{|q_n\rangle\}$, och dess väntevärde, $\langle Q \rangle$?

Lösning: Det innebär att de också är energiegentillstånd: $\hat{H} |q_n\rangle = E |q_n\rangle$ för någon energiegenvärde E . Dessutom betyder det att $\langle Q \rangle$ är bevarad, d.v.s. oberoende av tid.

- (d) (2 poäng) Vad är vågfunktionerna i positionsbasen och rörelsemängdsbasen, $\psi(x)$ respektive $\tilde{\psi}(p)$, av en partikel med bestämd rörelsemängd $p = p_0$?

Lösning: $\psi(x) = \exp(ip_0x/\hbar)/\sqrt{2\pi\hbar}$ och $\tilde{\psi}(p) = \delta(p - p_0)$.

- (e) (2 poäng) En partikels vågfunktion är given av $\psi(x) = N$ om $|x| < L/2$ och 0 annars. Din kollega Dr Knowitall påstår att det finns ett unikt värde för N . Har den gode doktorn rätt eller inte? Förklara ditt svar.

Lösning: Nej. Det krävs att $|N|^2L = 1$, vilket uppfylls av alla komplexa tal $e^{i\phi}/\sqrt{L}$ där ϕ är en godtycklig fas.

2. Partiklar med massa m och energi E skickas från $x = -\infty$ mot ett potentialsteg:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Energien uppfyller $0 < E < V_0$.

- (a) (2 poäng) Ange vilka randvillkor vågfunktionen och dess första derivata uppfyller vid $x = 0$ och förklara varför dessa randvillkor behövs.

Lösning: Både vågfunktionen och dess första derivata ska kontinuerliga vid $x = 0$, så att en rörelsemängd och rörelseenergi ska vara väldefinierade.

- (b) (4 poäng) Lös den tidsberoende Schrödinger-ekvationen för vågfunktionen $\psi(x)$ med hjälp av randvillkoren i (a). Medan du inte behöver normera vågfunktionen, eliminera så många konstanter som du kan.

Lösning: TOSE blir $\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$ i området $x < 0$ och $\frac{d^2\psi}{dx^2} + q^2\psi = 0$ i området $x > 0$, där $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ och $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Givet att partiklarna skickas vänsterifrån erhåller vi att $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ om $x < 0$ och $\psi(x) = Ce^{-qx}$ om $x > 0$.

Att ψ är kontinuerlig betyder att $A + B = C$. Att ψ' är kontinuerlig betyder att $ik(A - B) = -qC$. $ik(A + B) = ikC$ och $ik(A - B) = -qC$ ger att $C/A = 2k(k - iq)/(k^2 + q^2)$ och $B/A = (k - iq)^2/(k^2 + q^2)$.

- (c) (2 poäng) Efter vilket avstånd in i steget, $L_{1/2}$, har sannolikhetstätheten att partikeln ska hittas vid x minskat till hälften av den vid $x = 0$?

Lösning:

$$\left| \frac{\psi(L_{1/2})}{\psi(0)} \right|^2 = \exp(-2qL_{1/2}) = 1/2 \implies L_{1/2} = \frac{\ln 2}{2q} = \frac{\hbar \ln 2}{\sqrt{8m(V_0 - E)}}$$

- (d) (2 poäng) En mätning visar att partikelns position är någonstans i området $0 < x < L_{1/2}$. Hur är detta möjligt om partikelns energi är mindre än potentialstegets höjd?

Lösning: Nyckelpunkten är att partikeln blir störd av mätningen! Genom att mäta positionen kollapsar vi vågfunktionen till ett mindre område, vilket ökar partikelns rörelseenergi i enlighet med osäkerhetsprincipen. (Vi kan uppskatta partikelns energi efter mätningen, E' , så här: $\sigma_x \sigma_p > \hbar/2$ ger att $L_{1/2}^2(2mT) \gtrsim \hbar^2/4$ och $E' = T + V_0 \simeq 2.08(V_0 - E) + V_0$ samt $E' > V_0$.)

3. En partikel med massa m är bunden i en endimensionell kvadratisk potentialbrunn med naturlig frekvens ω_0 . Den är störd av en väldigt smal potential $\hat{H}' = -\alpha\delta(x)$, där $\alpha > 0$.

Vågfunktionerna som motsvarar de första tre ostörda energiegentillstånden är:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right) \times \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x/L, & n = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[(x/L)^2 - 1], & n = 2 \end{cases} \quad (2)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- (a) (2 poäng) Bestäm första ordningens korrigering till grundtillståndets energi.

Lösning:

$$E_0^{(1)} = \langle 0 | \hat{H}' | 0 \rangle = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x) \delta(x) \psi_0(x) dx = -\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}L}$$

- (b) (2 poäng) Vad är första ordningens korrigering till det första exciterade tillståndets energi, och varför?

Lösning: Den är noll eftersom vågfunktionen försvinner vid $x = 0$ och partikeln känner ingen störning.

- (c) (4 poäng) Det störda grundtillståndet $|E_g\rangle$ kan uttryckas i termer av de orstörda energiegentillstånden $|n\rangle$ som $|E_g\rangle \simeq |0\rangle + A|2\rangle + \dots$. Bestäm konstanten A .

Lösning: Det störda grundtillståndet är

$$|E_g\rangle = |0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |k\rangle, \quad \alpha_k = \frac{\langle k | \hat{H}' | 0 \rangle}{E_0 - E_k}. \quad (3)$$

Matriselementen är noll för $k = 1$ eftersom vågfunktionen försvinner vid $x = 0$.

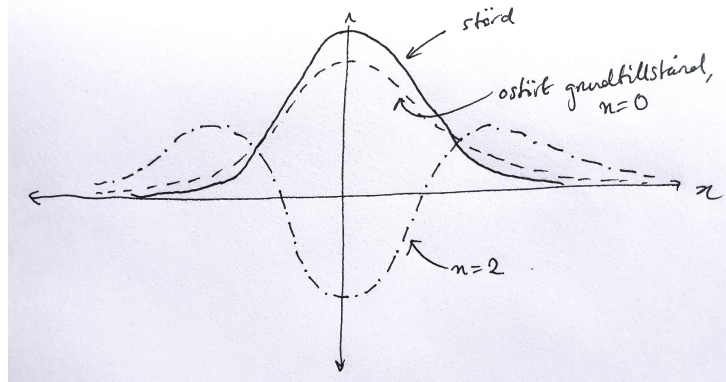
$$\langle 2 | \hat{H}' | 0 \rangle = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2^*(x) \delta(x) \psi_0(x) dx = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}L} \quad (4)$$

och $E_0 - E_2 = -2\hbar\omega_0$. Då har vi att

$$A = -\frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}\hbar\omega_0 L} \quad (5)$$

- (d) (2 poäng) Med hjälp av ditt svar i (c), skissa vågfunktionerna som motsvarar det störda grundtillståndet respektive det störda. Förklara det du finner.

Lösning:



Vågfunktionen blir högre och tätare omkring $x = 0$ då partikeln dras in av den attraktiva störningen.

4. En elektron har spinnstillståndet

$$|\psi\rangle = |\downarrow\rangle \quad (6)$$

vid $t = 0$, där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att elektronen är spinn-upp respektive spinn-ner med avseende på z -axeln. Hamiltonianen är

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \right) \quad (7)$$

där ω_c är reell och positiv.

- (a) (3 poäng) Bestäm elektronens spinnstillstånd vid allmän tidspunkt t . Skriv ditt svar i termer av $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$.

Lösning: Hamiltonianen $\hat{H} = \hbar\omega_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvektorer $|E_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ och egenvärden $E_{\pm} = \pm\hbar\omega_c$. Skriv om begynnelsevillkoret, $|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_+\rangle - |E_-\rangle)$, lägg till wiggel-faktorer, och kolla värdet vid $t = 0$!

$$|\psi; t\rangle = \frac{e^{-i\omega_c t} |E_+\rangle - e^{i\omega_c t} |E_-\rangle}{\sqrt{2}} = -i \sin \omega_c t |\uparrow\rangle + \cos \omega_c t |\downarrow\rangle.$$

- (b) (6 poäng) Vad är sannolikheterna att erhålla spinn-upp eller spinn-ner om vi mäter vid allmän tidspunkt t :

- i. spinnet i x -ledet, S_x ?

Lösning: $\hat{S}_x = \hat{H}/(2\omega_c)$ så vi vet redan att spinn-upp och ner motsvarar tillståndena $|E_+\rangle$ resp. $|E_-\rangle$. Sannolikheterna är då $1/2$ för båda två, oavsett tid.

- ii. spinnet i y -ledet, S_y ?

Lösning: Diagonalisera $S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ för att finna $|\pm y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. Sannolikhetsamplituden att erhålla spinn-upp är $i(\sin \omega_c t - \cos \omega_c t)/\sqrt{2}$. Sannolikheterna är $P_{+y} = (1 + \sin 2\omega_c t)/2$ och $P_{-y} = (1 - \sin 2\omega_c t)/2$.

- iii. spinnet i z -ledet, S_z ?

Lösning: $P_{+z} = \sin^2 \omega_c t = (1 - \cos 2\omega_c t)/2$, $P_{-z} = (1 + \cos 2\omega_c t)/2$.

- (c) (1 poäng) Beskriv spinnets rörelse fysikaliskt.

Lösning: Spinnet roterar omkring x -axeln med period $2\pi/\omega_c$.

5. Vågfunktionen som beskriver elektronen i en väteatom är,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}} \frac{r \sin \theta}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0} + i\phi\right), \quad (8)$$

där a_0 är Bohr-radien och vi använder sfäriska koordinater r, θ, ϕ .

(Om du använder handboken i denna uppgift, förklara hur.)

(a) Vad blir utfallet om vi mäter...

Lösning: $\psi(\mathbf{r}) = R_{2,1}(r)Y_{1,1}(\theta, \phi) \implies n = 2, \ell = 1, m_\ell = 1.$

i. (1 poäng) ... elektronens totala energi?

Lösning: $E = -\mathcal{R}/4 = -3.4 \text{ eV}.$

ii. (1 poäng) ... banrörelsemängdsmomentets belopp, $|\mathbf{L}|$?

Lösning: $\sqrt{L^2} = \sqrt{2}\hbar.$

iii. (1 poäng) ... banrörelsemängdsmomentets projektion längs z -axeln?

Lösning: $L_z = +\hbar.$

(b) (5 poäng) Bestäm väntevärdena $\langle \varrho^2 \rangle$ och $\langle z^2 \rangle$, där $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Lösning: OBS: $\langle \varrho^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle z^2 \rangle$. Slå upp $\langle r^2 \rangle$ som funktion av n och ℓ i handboken: $\langle r^2 \rangle = n^2 a_0^2 [5n^2 - 3\ell(\ell + 1) + 1]/2 = 30a_0^2$.

Skriv om z^2 i sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &= \iiint r^2 \cos^2 \theta |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{64\pi a_0^5} \underbrace{\int_0^\infty r^2 r^2 e^{-r/a_0} r^2 dr}_{\mathcal{R}} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin \theta d\theta}_{\Theta} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{\Phi} \end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \int_0^\infty r^6 e^{-r/a_0} dr = 720a_0^7$$

$$\Theta = \int_0^\pi (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi + \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^\pi = \frac{4}{15}$$

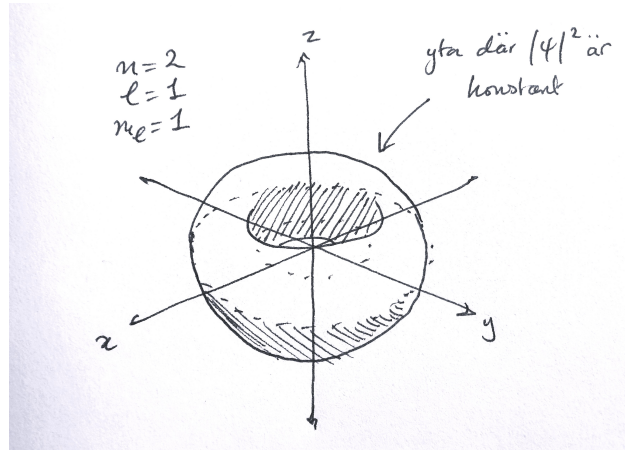
$$\Phi = 2\pi$$

$$\implies \langle z^2 \rangle = 6a_0^2$$

$$\implies \langle \varrho^2 \rangle = 24a_0^2$$

- (c) (2 poäng) Skissa orbitalen som ek. 8 definierar och ge en beskrivning av elektronens rörelse.

Lösning:



Detta kan tolkas som om elektronen rör sig längs en cirkulär omloppsbana i x-y planet.

6. Din kollega Dr Knowitall poängterar att elektronen i en väteatom har både banrörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$ och spinn $\mathbf{S}$, vilka kan kombineras i det totala rörelsemängdsmomentet $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Elektronen har inledningsvis bestämda $J^2 = 3\hbar^2/4$, $J_z = \hbar/2$ och $L^2 = 2\hbar^2$.

- (a) (4 poäng) Vad är de möjliga utfallen och motsvarande sannolikheter som gäller en mätning av banrörelsemängdsmomentets projektion längs z -axeln, L_z ?

Lösning: Innan mätningen har vi att $j = 1/2$, $m_j = 1/2$ och $\ell = 1$. Vi vet också att $s = 1/2$ för en elektron. Använd Clebsch-Gordan tabellerna för att skriva om $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, ett tillstånd med bestämt J_z , i termer av tillstånd där elektronen har bestämda L_z och S_z :

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

De möjliga utfallen är $L_z = \hbar$ och 0 med sannolikheter $2/3$ resp. $1/3$.

(Sanity check: då S_z kan vara $\pm\hbar/2$ går det att uppfylla $J_z = L_z + S_z = \hbar/2$ endast om $L_z = 0$ resp. $\hbar$.)

- (b) (5 poäng) Vi mäter L_z och sedan J^2 . Vad är sannolikheten att vi återfår det ursprungliga värdet av J^2 ?

Lösning: Mätningen förändrar tillståndet till ett av de två möjligheterna ovan. Använd Clebsch-Gordan tabellerna igen för att skriva om $|\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ i termer av $|j, m_j\rangle$:

$$L_z = \hbar : \quad |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad P = 2/3$$

$$L_z = 0 : \quad |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad P = 1/3$$

Sannolikheten att återfå $J^2 = 3\hbar^2/4$ är $(2/3)^2 + (1/3)^2 = \underline{5/9}$.

- (c) (1 poäng) Förklara varför sannolikheten du hittade i b) inte är lika med 1.

Lösning: L_z kommuterar inte med J^2 så det går inte att veta båda två exakt och samtidigt. En mellanliggande mätning påverkar därför det slutliga resultatet.

7. Deutschs algoritm bestämmer om en funktion f , som ger antingen 0 eller 1 som output, är *konstant* eller *balanserad*. ”Konstant” betyder att funktionen ger samma output oavsett input, $f(x) = 1, \forall x$ eller $f(x) = 0, \forall x$. ”Balanserad” betyder att funktionen ger 1 för hälften av alla möjliga x och 0 för den andra hälften.

Algoritmen funkar på följande sätt för en en-bit f (*one-bit*, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1$):

1. Dataregistret x och kontrollregistret y är laddade med qubitarna $|0\rangle$ respektive $|1\rangle$: $|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$.
2. En Hadamard grind tillämpas på båda qubitarna: $|\Psi\rangle = \hat{U}_H |0\rangle \otimes \hat{U}_H |1\rangle$.
3. Funktionen tillämpas så att kontrollregistret blir $y' = [y + f(x)] \pmod 2$.
4. En till Hadamard grind tillämpas på dataregistret.

Tips: Kvantbit-tillstånden och Hadamard-operatoren i beräkningsbasen är givna av:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

- (a) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 3, för någon konstant f och någon balanserad f .

Lösning: Efter steg 2 har vi att

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2}.$$

Om $f(0) = f(1) = 0$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle}{2} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}$$

- (b) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 4, för samma fall som i (b).

Lösning: Om $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = f(1) = 0$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Om $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}$$

- (c) (1 poäng) Givet (c), hur skulle vi bestämma om funktionen är konstant eller balanserad?

Lösning: Mät dataregistret. Om det är 0 (1) är funktionen konstant (balanserad).

”No cloning” teoremet förbjuder att det existerar en unitär operator som kan kopiera ett godtyckligt kvanttillstånd $|\psi\rangle$.

- (e) (1 poäng) Varför måste operatören vara unitär?

Lösning: Kloning som fysikalisk process måste beskrivas av någon Hamiltonian och tidsevolution enligt Schrödingerekvationen är alltid unitär.

- (f) (3 poäng) Bevisa ”no cloning” teoremet.

Lösning: Ett möjligt sätt: om $\hat{U}_C$ kan kopiera ett allmänt kvanttillstånd har vi att

$$\begin{aligned}\hat{U}_C |0\rangle \otimes |\psi\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, \\ \hat{U}_C |1\rangle \otimes |\psi\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ \hat{U}_C (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |\psi\rangle &= (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\ &= \alpha^2 |0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\beta |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &\quad + \alpha\beta |1\rangle \otimes |0\rangle + \beta^2 |1\rangle \otimes |1\rangle\end{aligned}$$

Men detta strider mot:

$$\begin{aligned}\hat{U}_C(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\psi\rangle &= \alpha \hat{U}|0\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta \hat{U}|1\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &= \alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle\end{aligned}$$

så det finns ingen sådan operator.

(g) (1 poäng) Varför är detta viktigt för kvantkommunikation?

Lösning: En tjuvlyssnare kan inte kopiera ett meddelande, analysera det, och skicka det vidare utan att ha förändrat det.

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1			
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0	
$1/2$	$1/2$	1	0	0	
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1
			$-1/2$	$-1/2$	1

tabell-
förklaring:

S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$					
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$			
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$			
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$	
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$	
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/2$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$	$-3/2$
					-1	$-1/2$	1