

Kvantfysik

Tentamen Oktober 2024

Kurs: TIF395

Tid: 2024/10/28, 0830 – 1230

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (1 poäng) Vad finns det för experimentellt bevis att energi är kvantiserad?
- (b) (1 poäng) Förklara varför tillståndet $|\psi\rangle$ som beskriver ett kvantmekaniskt system ska vara normerat.
- (c) (2 poäng) Vad är ett *stationärt tillstånd* och varför är det så kallat?
- (d) (1 poäng) De egentillstånd av en Hermitsk operator som motsvarar olika egenvärden är ortogonala. Varför är detta nödvändigt för att Hermitska operatorer ska representera fysikaliska storheter inom kvantfysik?
- (e) (1 poäng) En partikel rör sig (i en dimension) med bestämd energi. Under vilka förutsättningar kan den också ha bestämd rörelsemängd?
- (f) (2 poäng) Visa att operatorerna som motsvarar position och rörelsemängd (längs x axeln) inte kommuterar. Vad innebär detta för kunskapen man får ha om en partikels bana?
- (g) (2 poäng) Låt $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ och $\hat{J}_z$ vara operatorerna som motsvarar ett systems totala rörelsemängdsmoment omkring x , y och z axlarna. Förklara varför dessa komponenter av $\hat{\mathbf{J}}$ inte kommuterar med varandra, medan de alla kommuterar med det kvadrerade beloppet $\hat{J}^2$.



2. En partikel med massa m är bunden i en kvadratisk potentialbrunn med naturlig frekvens ω_0 . Vid $t = 0$ är partikeln beskriven av tillståndet:

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

där $|n\rangle$ är egentillståndet motsvarar energinivån n .

- (a) (2 poäng) Visa att tidsevolution, enligt den tidsberoende Schrödingerekvationen, är unitär i allmänhet. Förklara varför detta är viktigt.
- (b) (6 poäng) Bestäm $\langle x \rangle$ (väntevärdet av partikelns position) och σ_x (osäkerheten i partikelns position) som funktioner av tid.
- (c) (2 poäng) Jämför dina svar i (b) med vad du erhåller från en *klassisk* harmonisk oscillator som har total energi given av $\langle E \rangle$, partikelns energiväntevärde. Betrakta både amplituden och oscillationsfrekvensen. Stämmer de överens?

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

3. En stråle spinn-1 partiklar färdas längs z -axeln genom ett Stern-Gerlach filter, vars magnetiska fält kan vridas genom en vinkel θ i planet ortogonalt mot färdriktningen. Varje partikel i strålen är beskriven av tillståndet

$$|\psi\rangle = \frac{i}{2} |1, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle - \frac{i}{2} |1, -1\rangle, \quad (2)$$

där $|s, m_s\rangle$ är ett spinnegentillstånd med kvanttal s och m_s . Filtret utför en mätning av spinnkomponenten som har motsvarande operator

$$\hat{S}_\theta = \hat{S}_x \cos \theta + \hat{S}_y \sin \theta. \quad (3)$$

- (a) (2 poäng) Din kollega Dr Knowitall tycker att det största värdet för S_θ måste vara lika med partiklarnas spinnbelopp $|\mathbf{S}|$. Har den gode doktorn rätt eller inte? Förklara ditt svar.
- (b) (6 poäng) Bestäm andelarna som strålen fördelas i, som funktion av θ , och ange för varje andel vad partiklarna har gemensamt.
- (c) (2 poäng) För vilka vinklar blir strålen mest jämnt fördelad, respektive mest ojämnt? Förklara vad dina svar betyder om partiklarnas spinn.



4. Elektronen i en väteatom har bestämd energi $E = -\hbar^2/(18ma_0^2)$, där a_0 är Bohr-radien. Dess banrörelsemängdsmoment är så stort som det kan vara, och så parallellt med z -axeln som det kan vara.
- (a) (1 poäng) Ange kvanttalen och vågfunktionen i positionsbasen, $\psi(\mathbf{r})$, som motsvarar det givna tillståndet.
 - (b) (5 poäng) Beräkna väntevärdena $\langle 1/r \rangle$ och $\langle 1/r^2 \rangle$ för vågfunktionen i a). Visa hur du har kommit fram till svaren.
Tips: $\int_0^\infty x^n \exp(-x) dx = n!$ för heltaliga n .
 - (c) (1 poäng) Vilken andel av elektronens energi är potentialenergi?
 - (d) (2 poäng) Vilken andel av elektronens rörelseenergi är radiell respektive tangentiell?
 - (e) (1 poäng) Hur skulle du pröva dina svar i (b) experimentellt?

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

5. Alice och Bob vill utföra ett experiment med spinn- $\frac{1}{2}$ partiklar och har därför köpt (kanske ogenomtänkt) en partikelkälla från *Blackburn's Discount Quantum Devices*. Källan har två driftsätt.

I det första skickas ut partikelpar där alla är beskrivna av tillståndet

$$|\Psi\rangle = \frac{|A \uparrow\rangle \otimes |B \downarrow\rangle + |A \downarrow\rangle \otimes |B \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Flödet av partikelpar blir då $|\Psi\rangle, |\Psi\rangle, |\Psi\rangle, |\Psi\rangle \dots$

I det andra skickas ut en slumpmässig men jämn fördelning av partikelpar med tillstånd

$$|\Phi_1\rangle = |A \uparrow\rangle \otimes |B \downarrow\rangle \quad \text{eller} \quad |\Phi_2\rangle = |A \downarrow\rangle \otimes |B \uparrow\rangle. \quad (5)$$

Flödet av partikelpar blir (till exempel) $|\Phi_1\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_2\rangle \dots$

Alice och Bob tar emot partikel A respektive B och utför mätningar på dem.

- (3 poäng) Visa att det syns ingen meningsfull skillnad mellan de två driftsätten om Alice och Bob mäter spinnprojektionens längs z -axeln för sina partiklar. Ange och kommentera statistik och korrelationer Alice och Bob erhåller i båda fall.
- (5 poäng) Visa om det syns en skillnad mellan de två driftsätten om Alice och Bob mäter spinnprojektionens längs x -axeln för sina partiklar. Ange och kommentera statistik och korrelationer Alice och Bob erhåller i båda fall.
- (2 poäng) Förklara vad resultaten i (a) och (b) innebär om mätning, och kommentera skillnaderna mellan tillstånden $|\Psi\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ och $|\Phi_2\rangle$.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

6. En partikel med massa m är bunden i en potentialbrunn som har gaussisk form:

$$V(x) = -\frac{4\hbar^2}{mb^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right), \quad (6)$$

där b är en reell konstant. Tyvärr går det inte att lösa den tidsberoende Schrödinger-ekvationen analytiskt i detta fall.

- (a) (5 poäng) Använd som ansatsvågfunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right), \quad (7)$$

där L är en valfri längd, och bestäm partikelns energiväntevärde som funktion av L .

Tips: Följande integraler kan vara till hjälp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$

- (b) (2 poäng) Med hjälp av svaret i (a), uppskatta grundtillståndets energi och ge ditt svar numeriskt i enheter av $\hbar^2/(mb^2)$.

Tips: Den enda reella och positiva roten av $y^4 - \frac{1}{16}(1+y^2)^{3/2} = 0$ är $y \simeq 0.5525$.

- (c) (3 poäng) Kommer det verkliga grundtillståndets energi att vara högre eller lägre än förutsägelsen i (b)? Ge ett bevis för ditt svar.

FORTSÄTTER PÅ NÄSTA SIDA

7. (a) (2 poäng) En supraleedande Josephsonövergångs dynamik kan modelleras som om en partikel med massa m (och inget spinn) hade varit infångad i potentialen

$$V(x) = V_0 \left[1 - \cos\left(\frac{x}{a}\right) \right], \quad (9)$$

där bredden $a > 0$ är fastställd och djupet $V_0 > 0$. Expandera potentialen omkring $x = 0$ till andra ordningen i förskjutningen x och använd denna uppskattning för att bestämma brunnens energinivåer samt för vilken V_0 den infångade partikeln kan användas som en kvantbit.

- (b) (2 poäng) I beräkningsbasen ges operatoren som motsvarar en Hadamardgrind av

$$\hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Bestäm och förklara tillståndet som skapas när man tillämpar en Hadamardgrind till båda kvantbitar i tillståndet $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

- (c) (1 poäng) Vad innebär resultatet i (b) för kvantberäkning?
- (d) (3 poäng) Bevisa "no cloning" teoremet, som förbjuder att det existerar en unitär operator som kan kopiera ett godtyckligt kvanttillstånd $|\psi\rangle$: $\hat{U}_C |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$.
- (e) (2 poäng) Ge en fördel och en nackdel av att kloning är förbjuden.

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1				
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0		
$1/2$	$1/2$	1	0	0		
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1	
			$-1/2$	$-1/2$	1	

tabell-
förklaring:

S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$				
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$		
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$		
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$
					-1	$-1/2$
						1

Kvantfysik

Tentamen Oktober 2024

Lösningsförslag

Kurs: TIF395

Tid: 2024/10/28, 0830 – 1230

Ansvarig: Tom Blackburn

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad

Totalt antal frågor: 7

Total poäng: 50

Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:

Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (1 poäng) Vad finns det för experimentellt bevis att energi är kvantiserad?

Lösning: Spektrallinjer.

- (b) (1 poäng) Förklara varför tillståndet $|\psi\rangle$ som beskriver ett kvantmekaniskt system ska vara normerat.

Lösning: Den totala sannolikheten ska vara lika med 1.

- (c) (2 poäng) Vad är ett *stationärt tillstånd* och varför är det så kallat?

Lösning: Ett energiegentillstånd $|E\rangle$ är så kallat då dess tidsevolution är bara en snurrande fas: $|E; t\rangle = \exp(-iEt/\hbar) |E\rangle$.

- (d) (1 poäng) De egentillstånd av en Hermitsk operator som motsvarar olika egenvärden är ortogonala. Varför är detta nödvändigt för att Hermitska operatorer ska representera fysikaliska storheter inom kvantfysik?

Lösning: Sannolikheten att erhålla något annat utfall q_k , när systemet har bestämt q_n , ska vara noll: $\langle q_k | q_n \rangle = 0$ om $q_n \neq q_k$.

- (e) (1 poäng) En partikel rör sig (i en dimension) med bestämd energi. Under vilka förutsättningar kan den också ha bestämd rörelsemängd?

Lösning: Om potentialen är en konstant: $V(x) = V_0$.

- (f) (2 poäng) Visa att operatorerna som motsvarar position och rörelsemängd (längs x axeln) inte kommuterar. Vad innebär detta för kunskapen man får ha om en partikels bana?

Lösning: Det är omöjligt att veta en partikels position och rörelsemängd exakt och samtidigt då

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | \psi \rangle = \left[x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x) = -i\hbar (x\psi' - \psi - x\psi') = i\hbar\psi(x) \neq 0$$

- (g) (2 poäng) Låt $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ och $\hat{J}_z$ vara operatorerna som motsvarar ett systems totala rörelsemängdsmoment omkring x , y och z axlarna. Förklara varför dessa komponenter av $\hat{\mathbf{J}}$ inte kommuterar med varandra, medan de alla kommuterar med det kvadrerade beloppet $\hat{J}^2$.

Lösning: $\hat{\mathbf{J}}$ är kopplat med rotationer, och rotationer omkring ortogonala axlar kommuterar inte. Men en vektors längd är bevarad av en rotation.

2. En partikel med massa m är bunden i en kvadratisk potentialbrunn med naturlig frekvens ω_0 . Vid $t = 0$ är partikeln beskriven av tillståndet:

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

där $|n\rangle$ är egentillståndet motsvarar energinivån n .

- (a) (2 poäng) Visa att tidsevolution, enligt den tidsberoende Schrödingerekvationen, är unitär i allmänhet. Förklara varför detta är viktigt.

Lösning: Integrera $\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt}$ över en kort tidsintervall för att finna $|\psi; t + \Delta t\rangle = |\psi; t\rangle - \frac{i\Delta t}{\hbar} \hat{H} |\psi; t\rangle$.

$$\langle\psi; t + \Delta t|\psi; t + \Delta t\rangle = \langle\psi; t|\psi; t\rangle + \frac{i\Delta t}{\hbar} (\hat{H}^\dagger - \hat{H}) \langle\psi; t|\psi; t\rangle + O(\Delta t^2)$$

Den TBSE:n bevarar därför tillståndets norm. Vi vill ha att den totala sannolikheten, om den inledningsvis är 1, alltid är 1.

- (b) (6 poäng) Bestäm $\langle x \rangle$ (väntevärdet av partikelns position) och σ_x (osäkerheten i partikelns position) som funktioner av tid.

Lösning: Skriv om positionsoperatoren i termer av stegoperatorer, $\hat{x} = L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, och tillämpa den till det tidsberoende tillståndet:

$$\begin{aligned} |\psi; t\rangle &= \frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{e^{-3i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |1\rangle \\ \hat{x} |\psi; t\rangle &= \frac{Le^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{Le^{-3i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) \\ \hat{x}^2 |\psi; t\rangle &= \frac{L^2 e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle) + \frac{L^2 e^{-3i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} [|1\rangle + \sqrt{2}(\sqrt{2}|1\rangle + \sqrt{3}|3\rangle)] \end{aligned}$$

Inreprodukten med $\langle\psi; t|$ ska välja ut bara de termer med $|0\rangle$ och $|1\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{x} |\psi; t\rangle &= \frac{Le^{-3i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{Le^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |1\rangle + \dots \\ \hat{x}^2 |\psi; t\rangle &= \frac{L^2 e^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{3L^2 e^{-3i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}} |1\rangle + \dots \\ \Rightarrow \langle x \rangle &= \frac{L}{2} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) = L \cos \omega_0 t \\ \Rightarrow \langle x^2 \rangle &= \frac{L^2}{2} (1 + 3) = 2L^2 \end{aligned}$$

Vi har i så fall att $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = L\sqrt{2 - \cos^2 \omega_0 t} = L\sqrt{1 + \sin^2 \omega_0 t}$, där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- (c) (2 poäng) Jämför dina svar i (b) med vad du erhåller från en *klassisk* harmonisk oscillator som har total energi given av $\langle E \rangle$, partikelns energiväntevärde. Betrakta både amplituden och oscillationsfrekvensen. Stämmer de överens?

Lösning: Amplituden enligt klassisk fysik, x_0 , uppfyller $\langle E \rangle = \hbar\omega_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \implies x_0 = 2L$, som är större än svaret i (b). (Tar man hänsyn till osäkerheten gäller detta för det mesta av partikelns sannolikhetsfördelning.) Men att väntevärdet oscillerar vid den naturliga frekvensen ω_0 stämmer helt överens med klassisk fysik.

3. En stråle spinn-1 partiklar färdas längs z -axeln genom ett Stern-Gerlach filter, vars magnetiska fält kan vridas genom en vinkel θ i planet ortogonalt mot färdriktningen. Varje partikel i strålen är beskriven av tillståndet

$$|\psi\rangle = \frac{i}{2} |1, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle - \frac{i}{2} |1, -1\rangle, \quad (2)$$

där $|s, m_s\rangle$ är ett spinnegentillstånd med kvanttal s och m_s . Filtret utför en mätning av spinnkomponenten som har motsvarande operator

$$\hat{S}_\theta = \hat{S}_x \cos \theta + \hat{S}_y \sin \theta. \quad (3)$$

- (a) (2 poäng) Din kollega Dr Knowitall tycker att det största värdet för S_θ måste vara lika med partiklarnas spinnbelopp $|\mathbf{S}|$. Har den gode doktorn rätt eller inte? Förklara ditt svar.

Lösning: Den gode doktorn har fel. Ta som exempel $\theta = 0$. Hade det stämt att $S_x = |\mathbf{S}|$ skulle vi ha vetat att $S_y = S_z = 0$, men det är förbjudet att veta både S_x och S_z exakt och samtidigt då $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] \neq 0$!

- (b) (6 poäng) Bestäm andelarna som strålen fördelas i, som funktion av θ , och ange för varje andel vad partiklarna har gemensamt.

Lösning: Använd Paulimatriser för $s = 1$ för att bestämma S_θ i matrisform:

$$\hat{S}_\theta = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är $\{-1, 0, 1\}\hbar$. Börja med $S_\theta = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = 0 \quad (\text{första raden})$$

$$\alpha e^{i\theta} + \gamma e^{-i\theta} = 0 \quad (\text{andra raden})$$

och låt $\alpha = e^{-i\theta}$:

$$\Rightarrow |S_\theta = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ 0 \\ -e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Nu för $\lambda = \pm \hbar$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} & 0 & e^{-i\theta} \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \beta = \pm \alpha \quad (\text{första raden})$$

$$\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \beta = \pm \gamma \quad (\text{tredje raden})$$

där vi låter $\alpha = e^{-i\theta}$ igen:

$$|S_z = \hbar\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ \sqrt{2} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad |S_z = -\hbar\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ -\sqrt{2} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Andelen av partiklarna med $S_\theta = 0$ följer från sannolikhetsamplituden:

$$\langle S_\theta = 0 | \psi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -\sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} = \frac{i \cos \theta}{\sqrt{2}}$$

$$\implies P(S_\theta = 0) = \frac{\cos^2 \theta}{2}$$

Andelen av partiklarna med $S_\theta = +\hbar$ följer från sannolikhetsamplituden:

$$\langle S_\theta = \hbar | \psi \rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \sqrt{2} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -\sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} = -\frac{1 + \sin \theta}{2}$$

$$\implies P(S_\theta = +\hbar) = \frac{(1 + \sin \theta)^2}{4}$$

Den kvarstående andelen, $P = (-1 + \sin \theta)^2/4$, har $S_\theta = -\hbar$.

- (c) (2 poäng) För vilka vinklar blir strålen mest jämnt fördelad, respektive mest ojämnt? Förklara vad dina svar betyder om partiklarnas spinn.

Lösning: Vid $\theta = 0$ (till exempel) är andelarna $1/2$, $1/4$ och $1/4$ för $S_\theta = 0$, $\hbar$ resp. $-\hbar$. Vid $\theta = \pi/2$ är andelarna 0 , 1 och 0 . Partiklarna har spinn ”parallellt” med y-axeln: $|\psi\rangle = |S_y = +\hbar\rangle$.

4. Elektronen i en väteatom har bestämd energi $E = -\hbar^2/(18ma_0^2)$, där a_0 är Bohr-radien. Dess banrörelsemängdsmoment är så stort som det kan vara, och så parallellt med z -axeln som det kan vara.

- (a) (1 poäng) Ange kvanttalen och vågfunktionen i positionsbasen, $\psi(\mathbf{r})$, som motsvarar det givna tillståndet.

Lösning: $n = 3$, $\ell = 2$ och $m_\ell = 2$:

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{3,2}(r)Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{9\sqrt{30}a_0^{3/2}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right) \times \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}.$$

- (b) (5 poäng) Beräkna väntevärdena $\langle 1/r \rangle$ och $\langle 1/r^2 \rangle$ för vågfunktionen i a). Visa hur du har kommit fram till svaren.

Tips: $\int_0^\infty x^n \exp(-x) dx = n!$ för heltaliga n .

Lösning: Vi behöver bara den radiella vågfunktionen då väntevärdena inte beror på vinklarna θ, φ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{r} |R_{3,2}(r)|^2 r^2 dr \\ &= \frac{1}{81 \cdot 30a_0^3} \left(\frac{2}{3a_0}\right)^4 \int_0^\infty r^5 e^{-2r/(3a_0)} dr \\ &= \frac{1}{81 \cdot 30a_0^3} \left(\frac{2}{3a_0}\right)^4 \left(\frac{3a_0}{2}\right)^6 \int_0^\infty x^5 e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{9a_0} \end{aligned}$$

P.s.s.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{r^2} |R_{3,2}(r)|^2 r^2 dr \\ &= \frac{1}{81 \cdot 30a_0^3} \left(\frac{2}{3a_0}\right)^4 \int_0^\infty r^4 e^{-2r/(3a_0)} dr \\ &= \frac{1}{81 \cdot 30a_0^3} \left(\frac{2}{3a_0}\right)^4 \left(\frac{3a_0}{2}\right)^5 \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx \\ &= \frac{2}{135a_0^2} \end{aligned}$$

- (c) (1 poäng) Vilken andel av elektronens energi är potentialenergi?

Lösning: Med $E = -\hbar^2/(18ma_0^2)$ och $\langle V \rangle = -e^2/(36\pi\epsilon_0 a_0) = -\hbar^2/(9ma_0^2)$ finner vi att $\langle V \rangle = 2E$.

- (d) (2 poäng) Vilken andel av elektronens rörelseenergi är radiell respektive tangentiell?

Lösning: Väntevärdena av den totala, tangentiella och radiella rörelseenergierna är:

$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= E - \langle V \rangle = \frac{\hbar^2}{18ma_0^2} \\ \langle T_\theta \rangle &= \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{2\hbar^2}{45ma_0^2} & \implies \frac{\langle T_\theta \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{4}{5} \\ \langle T_r \rangle &= \langle T \rangle - \langle T_\theta \rangle = \frac{\hbar^2}{90ma_0^2} & \implies \frac{\langle T_r \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

- (e) (1 poäng) Hur skulle du pröva dina svar i (b) experimentellt?

Lösning: Förbereda många väteatomer i tillstånd $n = 3, \ell = 2, m_\ell = 2$ och mät avståndet mellan protonen och elektronen (radien r) en gång per atom. Genomsnittet av $1/r$ och $1/r^2$ borde då stämma överens med de erhållna väntevärdena.

5. Alice och Bob vill utföra ett experiment med spinn- $\frac{1}{2}$ partiklar och har därför köpt (kanske ogenomtänkt) en partikelkälla från *Blackburn's Discount Quantum Devices*. Källan har två driftsätt.

I det första skickas ut partikelpar där alla är beskrivna av tillståndet

$$|\Psi\rangle = \frac{|A \uparrow\rangle \otimes |B \downarrow\rangle + |A \downarrow\rangle \otimes |B \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Flödet av partikelpar blir då $|\Psi\rangle, |\Psi\rangle, |\Psi\rangle, |\Psi\rangle \dots$

I det andra skickas ut en slumpmässig men jämn fördelning av partikelpar med tillstånd

$$|\Phi_1\rangle = |A \uparrow\rangle \otimes |B \downarrow\rangle \quad \text{eller} \quad |\Phi_2\rangle = |A \downarrow\rangle \otimes |B \uparrow\rangle. \quad (5)$$

Flödet av partikelpar blir (till exempel) $|\Phi_1\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle, |\Phi_2\rangle \dots$

Alice och Bob tar emot partikel A respektive B och utför mätningar på dem.

- (a) (3 poäng) Visa att det syns ingen meningsfull skillnad mellan de två driftsätten om Alice och Bob mäter spinnprojektion längs z -axeln för sina partiklar. Ange och kommentera statistik och korrelationer Alice och Bob erhåller i båda fall.

Lösning: Börja med $|\Psi\rangle$. Om Alice får spinn-upp (ner) har hon kollapsat tillståndet till $|\Phi_1\rangle$ ($|\Phi_2\rangle$) och i så fall får Bob spinn-ner (upp) med 100% sannolikhet.

		B	
		upp	ner
A	upp	0	1/2
	ner	1/2	0

I fallet av $|\Phi_1\rangle$ får Alice och Bob spinn-upp resp. spinn-ner med 100% sannolikhet, då ingen kollaps sker. Detta gäller också $|\Phi_2\rangle$:

		B	
		upp	ner
A	Φ_1	0	1
	ner	0	0

		B	
		upp	ner
A	Φ_2	0	0
	ner	1	0

		B	
		upp	ner
A	Φ_1 el. Φ_2	0	1/2
	ner	1/2	0

Eftersom de får en slumpmässig men jämn blandning av dessa fall syns ingen skillnad: i båda driftsätt erhåller Alice och Bob 50% spinn-upp och 50% spinn-ner samt motsatta utfall 100% av tiden.

- (b) (5 poäng) Visa om det syns en skillnad mellan de två driftsätten om Alice och Bob mäter spinnprojektion längs x -axeln för sina partiklar. Ange och kommentera statistik och korrelationer Alice och Bob erhåller i båda fall.

Lösning: Då Alice och Bob mäter S_x behöver vi skriva om tillståndet i termer av S_x 's egentillstånd. Diagonalisera Paulimatrisen för att finna

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\uparrow\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\downarrow\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

där $|+\rangle$ och $|-\rangle$ betyder spinn-upp resp. spinn-ner med avseende på x -axeln. Partikelkällans möjliga tillstånd blir i så fall:

$$|\Phi_1\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle = \frac{|+\rangle \otimes |+\rangle - |+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle - |-\rangle \otimes |-\rangle}{2}$$

$$|\Phi_2\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \frac{|+\rangle \otimes |+\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle + |+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |-\rangle}{2}$$

$$|\Psi\rangle = \frac{|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|+\rangle \otimes |+\rangle - |-\rangle \otimes |-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Nu i driftsätt 1 erhåller Alice och Bob 50% spinn-upp och 50% spinn-ner (i x -ledet) samt identiska utfall 100% av tiden:

		B	
		upp	ner
A	upp	1/2	0
	ner	0	1/2

Men i driftsätt 2 erhåller Alice och Bob 50% spinn-upp och 50% spinn-ner (i x -ledet) samt identiska utfall 50% av tiden:

		B	
		upp	ner
A	Φ_1	1/4	1/4
	upp	1/4	1/4
	ner	1/4	1/4

		B	
		upp	ner
A	Φ_2	1/4	1/4
	upp	1/4	1/4
	ner	1/4	1/4

Det finns därför en skillnad i att korrelationen är svagare i driftsätt 2.

- (c) (2 poäng) Förklara vad resultaten i (a) och (b) innebär om mätning, och kommentera skillnaderna mellan tillstånden $|\Psi\rangle$, $|\Phi_1\rangle$ och $|\Phi_2\rangle$.

Lösning: Det är mätningen som bestämmer vilken möjlighet som omfattas av $|\Psi\rangle$ "förverkligas"; det är inte förbestämt. $|\Psi\rangle$ är sammanflätat medan $|\Phi_1\rangle$ och $|\Phi_2\rangle$ är separerbara. I första fallet påverkar en mätning av den ena partikeln sannolikheterna som gäller den andra. I det andra är partiklarna helt oberoende.

6. En partikel med massa m är bunden i en potentialbrunn som har gaussisk form:

$$V(x) = -\frac{4\hbar^2}{mb^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right), \quad (6)$$

där b är en reell konstant. Tyvärr går det inte att lösa den tidsberoende Schrödingerekvationen analytiskt i detta fall.

(a) (5 poäng) Använd som ansatsvågfunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right), \quad (7)$$

där L är en valfri längd, och bestäm partikelns energiväntevärde som funktion av L .

Tips: Följande integraler kan vara till hjälp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (8)$$

Lösning: Betrakta rörelseenergin först:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{2\pi}L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right) \left(-\frac{1}{2L^2} + \frac{x^2}{4L^4}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4L^2}\right) dx \\ &= -\frac{\hbar^2}{4mL^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 - 1)e^{-y^2} dy \quad \left[\text{med } y = \frac{x}{\sqrt{2}L} \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{8mL^2} \end{aligned}$$

Partikelns potentiellenergi är

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} V(x) |\psi(x)|^2 dx \\ &= -\frac{4\hbar^2}{mb^2\sqrt{2\pi}L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} - \frac{x^2}{2L^2}\right) dx \\ &= -\frac{4\hbar^2}{mb^2\sqrt{\pi}} \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{4\hbar^2}{mb^2} \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} \end{aligned}$$

- (b) (2 poäng) Med hjälp av svaret i (a), uppskatta grundtillståndets energi och ge ditt svar numeriskt i enheter av $\hbar^2/(mb^2)$.

Tips: Den enda reella och positiva roten av $y^4 - \frac{1}{16}(1+y^2)^{3/2} = 0$ är $y \simeq 0.5525$.

Lösning: Minimera energiväntevärdet med avseende på L :

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{\hbar^2}{8mL^2} - \frac{4\hbar^2}{mb^2} \frac{b}{\sqrt{L^2 + b^2}} \\ \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial L} &= 0 = -\frac{\hbar^2}{4mL^3} + \frac{4\hbar^2}{mb^2} \frac{bL}{(L^2 + b^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{16}b(L^2 + b^2)^{3/2} + L^4 \\ &= -\frac{1}{16}(y^2 + 1)^{3/2} + y^4 \quad [\text{med } y = L/b] \\ \Rightarrow L &= 0.5525b \\ \Rightarrow E_g &\simeq -3.09 \frac{\hbar^2}{mb^2}\end{aligned}$$

- (c) (3 poäng) Kommer det verkliga grundtillståndets energi att vara högre eller lägre än förutsägelsen i (b)? Ge ett bevis för ditt svar.

Lösning: Lägre. Variationsmetoden ger en övre begränsning på grundtillståndets energi E_g :

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \\ &= \sum_n |\alpha_n|^2 E_n \quad \text{med } |\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |E_n\rangle \\ &\geq \sum_n |\alpha_n|^2 E_g \quad \text{då } E_n \geq E_g \text{ om } E_g \text{ är den lägsta energinivån} \\ \langle E \rangle &\geq E_g \quad \text{då tillståndet är normerat}\end{aligned}$$

7. (a) (2 poäng) En supraleedande Josephsonövergångs dynamik kan modelleras som om en partikel med massa m (och inget spinn) hade varit infångad i potentialen

$$V(x) = V_0 \left[1 - \cos\left(\frac{x}{a}\right) \right], \quad (9)$$

där bredden $a > 0$ är fastställd och djupet $V_0 > 0$. Expandera potentialen omkring $x = 0$ till andra ordningen i förskjutningen x och använd denna uppskattning för att bestämma brunnens energinivåer samt för vilken V_0 den infångade partikeln kan användas som en kvantbit.

Lösning: Potentialen vid andra ordningen är

$$V(x) \simeq V(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} x^2 \simeq \frac{V_0 x^2}{2a^2} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\hbar^2 V_0}{ma^2}}$$

Vi kan använda partikeln som en kvantbit om brunnen har endast två energieigen-tillstånd, $|0\rangle$ och $|1\rangle$:

$$E_1 < V_0 \Rightarrow V_0 > \frac{9\hbar^2}{4ma^2}, \quad E_2 > V_0 \Rightarrow V_0 < \frac{25\hbar^2}{4ma^2}.$$

- (b) (2 poäng) I beräkningsbasen ges operatoren som motsvarar en Hadamardgrind av

$$\hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Bestäm och förklara tillståndet som skapas när man tillämpar en Hadamardgrind till båda kvantbitar i tillståndet $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

Lösning: Med $\hat{U}_H |0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$,

$$\hat{U}_H |0\rangle \otimes \hat{U}_H |0\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2}$$

erhålls en superposition över alla tvåsiffriga binära tal.

- (c) (1 poäng) Vad innebär resultatet i (b) för kvantberäkning?

Lösning: Att kvantdatorer kan utföra beräkningar på alla möjliga tal på en gång eller ”massivt” parallella operationer.

- (d) (3 poäng) Bevisa ”no cloning” teoremet, som förbjuder att det existerar en unitär operator som kan kopiera ett godtyckligt kvanttillstånd $|\psi\rangle$: $\hat{U}_C |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$.

Lösning: Ett möjligt sätt: om $\hat{U}_C$ kan kopiera ett allmänt kvanttillstånd har vi att

$$\begin{aligned}\hat{U}_C |0\rangle \otimes |\psi\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle, \\ \hat{U}_C |1\rangle \otimes |\psi\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle, \\ \hat{U}_C(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |\psi\rangle &= (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\ &= \alpha^2 |0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\beta |0\rangle \otimes |1\rangle \\ &\quad + \alpha\beta |1\rangle \otimes |0\rangle + \beta^2 |1\rangle \otimes |1\rangle\end{aligned}$$

Men detta strider mot:

$$\begin{aligned}\hat{U}_C(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |\psi\rangle &= \alpha \hat{U} |0\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta \hat{U} |1\rangle \otimes |\psi\rangle \\ &= \alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle\end{aligned}$$

så det finns ingen sådan operator.

- (e) (2 poäng) Ge en fördel och en nackdel av att kloning är förbjuden.

Lösning: Detta ger grunden för säker kvantkommunikation då en tjuvlyssnare inte kan kopiera ett meddelande, analysera det, och skicka det vidare utan att ha förändrat det. Men kvantfelskorrigering blir mer komplicerat då man inte kan använda enkel redundans genom att skapa kopior av en kvantbits tillstånd.

SLUT PÅ TENTAMEN

Formelblad

- **Diracs deltafunktion:**

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1)$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3)$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:

$$\hat{J}_i |\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:

$$\hat{J}_i |\hat{L}_i |\hat{S}_i = \hbar \sigma_i.$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- **Hamiltonianen i sfäriska koordinater:**

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \quad (6)$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8)$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**

Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1				
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0		
$1/2$	$1/2$	1	0	0		
	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	-1	
			$-1/2$	$-1/2$	1	

tabell-
förklaring:

S
 M_S
 $m_1 \quad m_2 \quad C_{m_1,2,M}^{s_1,2,S}$

$s_1 = 1$		$3/2$				
$s_2 = \frac{1}{2}$		$3/2$	$3/2$	$1/2$		
1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$		
	1	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
			0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
			-1	$1/2$	$1/3$	$-2/3$
					-1	$-1/2$
						1