Kvantfysik

Tentamen Augusti 2024

Kurs: TIF395
Tid: 2024/08/19, 1400 – 1800
Ansvarig: Tom Blackburn
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad
Totalt antal frågor: 7
Total poäng: 50
Betygsgränser: Minst 20 $\Rightarrow$ 3 / minst 30 $\Rightarrow$ 4 / minst 40 $\Rightarrow$ 5

Instruktioner:
Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (2 poäng) Ge två egenskaper av Hermitska operatorer och förklara varför de behövs för att sådana operatorer kan representera fysikaliska mängder.

Lösning: En Hermitsk operators egenvärden är (alla) reella. Egentillstånd som motsvarar olika egenvärden är ortogonala med varandra. Det första behövs eftersom så att egenvärdena ger de (numeriska) resultaten av en mätning och den andra så att det finns ingen överlappning mellan annorlunda fysiskaliska utfall.

(b) (2 poäng) Vad betyder det, både matematiskt och i termer av kunskap man kan ha om ett kvantsystem, om två Hermitska operatorer kommuterar?

Lösning: De har en gemensam bas av egentillstånd och det går att veta båda två fysikaliska storheter exakt och samtidigt.

(c) (2 poäng) Ge vågfunktionen i positionsbasen och rörelsemängdsbasen, $\psi(x)$ och $\tilde{\psi}(p)$, av en partikel med bestämd rörelsemängd p_0. (Det räcker att betrakta rörelsen som endimensionell.)

Lösning: $\psi(x) = \exp(ipx)/\sqrt{2\pi\hbar}$. $\tilde{\psi}(p) = \delta(p - p_0)$.

(d) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den *tidsoberoende* respektive den *tidsberoende* Schrödinger-ekvationen?

Lösning: Endast energiegentillstånd uppfyller den tidsoberoende Schrödinger-ekvationen. Alla kvanttillstånd uppfyller den tidsberonde Schrödinger-ekvationen.

(e) (2 poäng) En partikel befinner sig i en superposition av olika tillstånd med bestämt banrörelsemängdsmoment, $|\psi\rangle = \sum_{\ell=0}^{4} \alpha_\ell |\ell, m_\ell = 0\rangle$. Vad är sannolikheten att en mätning ger $L = \hbar$? Vad är tillståndet direkt efter mätningen?

Lösning: Möjliga utfall är $\sqrt{\ell(\ell+1}\hbar$, dvs $\{0, \sqrt{2}, \cdots\}\hbar$ så sannolikheten är noll. Tillståndet kollapsar vid mätning och blir ett av egentillstånden $\{|0\rangle, |1\rangle, \cdots\}$.

2. En spinn-1/2 partikel förbereds så att dess tillstånd vid $t = 0$ är

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle\,. \tag{1}$$

Hamiltonianen är

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \Big(|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \Big), \tag{2}$$

där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att partikeln är spinn-upp respektive spinn-ner med avseende på z-axeln och ω_c är en vinkelfrekvens.

(a) (3 poäng) Vad är de möjliga utfallen och de motsvarande sannolikheterna om vi mäter partikelns energi?

Lösning: Lös egenvärdes-ekvationen för Hamiltonianen:

$$\underbrace{\hbar\omega_c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{H}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

Från $\det(\hat{H} - E\hat{I}) = E^2 - (\hbar\omega_c)^2 = 0$ får vi att energiegenvärdena (och de möjliga utfallen av en energimätning) är $E = \pm\hbar\omega_c$. De motsvarande egentillstånden är $|+\rangle = (1,1)^T/\sqrt{2}$ och $|-\rangle = (1,-1)^T/\sqrt{2}$. Sannolikheten att mätningen ger $+\hbar\omega_c$ är $|\langle+|\uparrow\rangle|^2 = 1/2$. För $E = -\hbar\omega_c$ är det också $1/2$.

(b) (7 poäng) Bestäm väntevärdena $\langle S_x\rangle$, $\left\langle S_y\right\rangle$ samt $\langle S_z\rangle$ som funktion av tid. Förklara fysikaliskt spinnvektorns rörelse.

Lösning: Det begynnande tillståndet är $|\uparrow\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)\sqrt{2}$ och det tidsberoende (med hjälp av wiggle-faktorer)

$$|\psi;t\rangle = \frac{e^{-i\omega_c t}|+\rangle + e^{i\omega_c t}|-\rangle}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \cos\omega_c t \\ -i\sin\omega_c t \end{pmatrix} \tag{4}$$

Bygg väntevärdena genom att klämma operatorn som krävs mellan en bra och en ket:

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos\omega_c t \quad i\sin\omega_c t\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega_c t \\ -i\sin\omega_c t \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$\left\langle S_y\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos\omega_c t \quad i\sin\omega_c t\right)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega_c t \\ -i\sin\omega_c t \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\sin 2\omega_c t, \tag{6}$$

$$\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos\omega_c t \quad i\sin\omega_c t\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega_c t \\ -i\sin\omega_c t \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\cos 2\omega_c t. \tag{7}$$

Spinnvektoren snurrar i y-z planet omkring x-axeln.

3. En partikel med massan m, bunden i en harmonisk oscillator med naturlig frekvens ω_0, är störd av en svag linjär potential $\hat{H}' = \varepsilon\hat{x}/L$, där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$ och ε är en positiv konstant.

   (a) (2 poäng) Bestäm första ordningens korrigering till energin, $E_n^{(1)}$, och förklara ditt svar fysikaliskt.

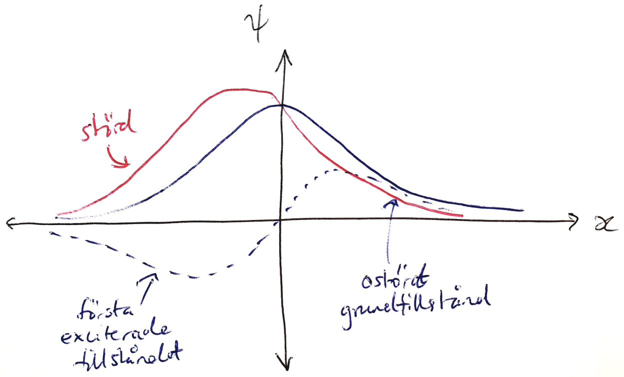
   Lösning:
   $$E_n^{(1)} = (\varepsilon/L)\langle n|\,\hat{x}\,|n\rangle = bL\,\langle n|\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\,|n\rangle = 0 \tag{8}$$
   eftersom $\hat{x}$ skapar tillstånd ett steg högre och lägre som är ortogonala med $|n\rangle$. Sannolikhetstätheterna som beskriver ett energiegentillstånd är symmetriska och då är det lika sannolik att partikeln kan hittas i området där störningen är positiv som där den är negativ.

   (b) (3 poäng) Visa att första ordningens korrigering till tillståndet är
   $$|n^{(1)}\rangle = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right). \tag{9}$$

   Lösning: Matriselementen $\langle k|\,\hat{x}\,|n\rangle = L(\sqrt{n}\,\langle k|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,\langle k|n+1\rangle)$ och energiskillnaden $E_n - E_k = \hbar\omega_0(n-k)$. Använd att $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ isolerar två termer i summan:
   $$|n^{(1)}\rangle = \frac{\varepsilon}{L}\sum_{k\neq n}\frac{\langle k|\,\hat{x}\,|n\rangle}{E_n - E_k}\,|k\rangle \tag{10}$$
   $$= \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0}\sum_{k\neq n}\frac{\sqrt{n}\,\langle k|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,\langle k|n+1\rangle}{n-k}\,|k\rangle \tag{11}$$
   Eftersom energiegentillstånd är ortogonala och normerade är den första inreprodukten nollskild endast i fallet $k = n-1$. Då blir $|k\rangle = |n-1\rangle$, $n-k = +1$ och inreprodukten själv 1. Den andra är nollskild om $k = n+1$; då blir $|k\rangle = |n+1\rangle$ och $n-k = -1$.

(c) (2 poäng) Skissa vågfunktionen i positionsbasen för både den ostörda och störda grundtillståndet. (Du behöver inte härleda den harmoniska oscillatorns energiegenfunktioner.)

Lösning: $\psi_0(x) \propto \exp(-x^2/2L^2)$ och $\psi_1(x) \propto (x/L)\exp(-x^2/2L^2)$ enligt handboken.



(d) (2 poäng) Bestäm andra ordningens korrigering till energin, $E_n^{(2)}$.

Lösning: Andra ordningens korrigering är $E_n^{(2)} = (\varepsilon/L)\langle n^{(0)}|\,\hat{x}\,|n^{(1)}\rangle$:

$$\hat{x}\,|n^{(1)}\rangle = \frac{\varepsilon L}{\hbar\omega_0}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) \tag{12}$$

$$= \frac{\varepsilon L}{\hbar\omega_0}\left[\left(\sqrt{n}\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\right)|n\rangle + \text{termer med } |n-2\rangle,\ |n+2\rangle\right] \tag{13}$$

$$E_n^{(2)} = -\frac{\varepsilon^2}{\hbar\omega_0} \tag{14}$$

(e) (1 poäng) Är energikorrigering till grundtillståndet positiv eller negativ? Förklara ditt svar fysikaliskt.

Lösning: Den är negativ eftersom störningen gör potentialenergin lägre för $x < 0$ och det är mer sannolikt ätt hitta partikeln i just det här området enligt skissen ovan.

4. En partikel har följande vågfunktion i positionsbasen:

$$\psi(x,y,z) = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi^{3/4}\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+\beta^2 z^2}{2\sigma^2}\right) \tag{15}$$

där β och σ är positiva konstanter.

(a) (6 poäng) Bestäm väntevärdena av partikelns rörelsemängd (i alla tre dimensioner) och rörelseenergi.
Tips: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2}dx = \sqrt{\pi}\sigma$ och $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/\sigma^2}dx = \sqrt{\pi}\sigma^3/2$.

Lösning: Vi kan utnyttja att vågfunktionen nästan är sfäriskt symmetrisk för att skriva om den som $\psi(x,y,z) = \phi(x,\sigma)\phi(y,\sigma)\phi(z,\sigma/\beta)$, där $\phi(x,\sigma) = \exp(-x^2/2\sigma^2)/(\pi^{1/4}\sigma^{1/2})$.
Först, rörelsemängd:

$$\begin{aligned}
\langle p_x\rangle &= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\sigma)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,\sigma)\,dx && (16)\\
&= -\frac{i\hbar}{\sqrt{\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)dx && (17)\\
&= 0 && (18)
\end{aligned}$$

och på samma sätt får vi att $\langle p_y\rangle = \langle p_z\rangle = 0$.
Rörelseenergin $\langle T\rangle = \langle T_x\rangle + \langle T_y\rangle + \langle T_z\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle T_x\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,\sigma)\frac{\partial^2\phi(x,\sigma)}{\partial x^2}\,dx && (19)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2\sqrt{\pi}m\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{x^2}{\sigma^4}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)dx && (20)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2\sqrt{\pi}m\sigma}\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\right) && (21)\\
&= \frac{\hbar^2}{4m\sigma^2} && (22)\\
\implies \langle T\rangle &= \frac{(2+\beta^2)\hbar^2}{4m\sigma^2} && (23)
\end{aligned}$$

(b) (4 poäng) Om β minskas blir vågfunktionen mer eller mindre utspridd längs z-axeln? Vad händer till rörelseenergin i så fall? Förklara vad detta har för relevans för kemisk bindning och ge ett exempel.

Lösning: Om β minskas blir vågfunktionen *mer* utspridd och då *minskas* rörelseenergin på grund av osäkerhetsprincipen: en större σ_x innebär en mindre $\sigma_p = \sqrt{2mT}$. I kovalent bindning är energin lägre när elektronen ”delas” mellan atomer (jämfört med läget där den är bunden till en atom) delvis eftersom den är mer delokaliserad.

5. En elektron, bunden i en väteatom med bestämd energi och bestämt banrörelsemängdsmoment, har Hamiltonianen:

$$\hat{H}_\ell = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m\hat{r}^2} - \frac{\hbar^2}{ma_0\hat{r}} \tag{24}$$

där $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ är Bohr-radien. Anta att $\ell = 1$.

(a) (2 poäng) Tolka de sista två termerna i ekvation 24 som en effektiv potentialenergi $V_{\text{eff}}(r)$ och bestäm dess värde vid jämviktsradien, $V_{\text{eff}}(r_0)$.

Lösning: Potentialens första derivata är $-2\hbar^2/(mr^3)+\hbar^2/(ma_0r^2)$. Jämviktsradien är $r_0 = 2a_0$ och potentialen vid denna punkt är $V(r_0) = -\hbar^2/(4ma_0^2) = -\mathcal{R}/2$.

(b) (3 poäng) Vilket tillstånd har den lägsta energin om $\ell = 1$ och vad är dess energi? Förklara varför ditt svar skiljer sig från det i (a).

Lösning: $\ell = 1$ motsvarar ett p-tillstånd så det är $2p$ som söks. Energin $E = -\mathcal{R}/2^2 = -\mathcal{R}/4$. Det är högre än potentialenergin vid jämviktspunkten eftersom elektronen har nollskild rörelseenergi. (Detta härstammer ifrån osäkerheten i elektronens position.)

(c) (3 poäng) Ange den radiella vågfunktionen $R_{n,\ell}(r)$ som motsvarar tillståndet i (b) och bestäm radien som är mest sannolik.

Lösning: Enligt boken $R_{2,1}(r) = (r/a_0)\exp[-r/(2a_0)]/(2\sqrt{6}a_0^{3/2})$. Sannolikhetstätheten $P \propto r^2|R_{2,1}(r)|^2 \propto r^4\exp(-r/a_0)$. Derivatan $dP/dr \propto r^3(4 - r/a_0)\exp(-r/a_0)$ försvinner vid $r = 4a_0$, den mest sannolika radien.

(d) (2 poäng) Dr Knowitall undrar hur man skulle verifiera ditt svar i (c) experimentellt. Förklara för den gode doktorn hur det skulle vara möjligt.

Lösning: Man skulle behöva att samla väldigt många väteatomer i sitt $2p$-tillstånd och mäta radien *en gång* per atom. Genom att bygga ett histogram över alla utfall, och titta på vilken kolonn var störst, kunde man verifiera vilken radie var mest sannolik.

6. Två par spinn-$1/2$ partiklar är förberedda så att det ena (A och B) är beskrivet av tillståndet

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|A{:}\uparrow\rangle \otimes |B{:}\downarrow\rangle + |A{:}\downarrow\rangle \otimes |B{:}\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

och det andra (C och D) av

$$|\Psi_2\rangle = \frac{|C{:}\uparrow\rangle \otimes |D{:}\downarrow\rangle - |C{:}\downarrow\rangle \otimes |D{:}\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{26}$$

där (t. ex.) $|A{:}\uparrow\rangle$ betyder att partikel A är spinn-upp med avseende på z-axeln.

Din kollega Dr Knowitall anser att för båda par ska en mätning av beloppet av parets totala spinn, $|\mathbf{S}^{(A)} + \mathbf{S}^{(B)}|$ eller $|\mathbf{S}^{(C)} + \mathbf{S}^{(D)}|$, ge noll eftersom ”partiklarna alltid har antiparallella spinnvektorer.”

(a) (4 poäng) Vad ger mätningen egentligen som utfall? Betrakta både $|\Psi_1\rangle$ och $|\Psi_2\rangle$. Har den gode doktorn som vanligt fel?

Lösning: Uttrycka båda tillstånd i termer av $|S, M_S\rangle$ med hjälp av Clebsch-Gordan tabellerna.

$$|\Psi_1\rangle = |S = 1, M_S = 0\rangle, \qquad |\Psi_2\rangle = |S = 0, M_S = 0\rangle. \tag{27}$$

Då $\hat{S}^2$ har egenvärden $S(S+1)\hbar^2$ ger som utfall en mätning av beloppet av parets totala spinn $\sqrt{2}\hbar$ respektive 0. Den gode doktorn har tyvärr fel.

(b) (6 poäng) Skriv om $|\Psi_1\rangle$ och $|\Psi_2\rangle$ så att de är givna i termer av S_x:s egentillstånd, dvs. tillstånd som uppfyller

$$\hat{S}_x^{(p)} |p{:}\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |p{:}\pm\rangle, \qquad p \in \{A, B, C, D\} \tag{28}$$

Ge med hjälp av detta en fysikalisk tolkning för dina svar i (a).

Lösning: Diagonalisera S_x för att få $|+\rangle = (1,1)^T/\sqrt{2}$ och $|-\rangle = (1,-1)^T/\sqrt{2}$ och därigenom att $|\uparrow\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ samt $|\downarrow\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$.

$$|A{:}\uparrow\rangle \otimes |B{:}\downarrow\rangle = \frac{|A{:}+\rangle|B{:}+\rangle - |A{:}+\rangle|B{:}-\rangle + |A{:}-\rangle|B{:}+\rangle - |A{:}-\rangle|B{:}-\rangle}{2} \tag{29}$$

$$|A{:}\downarrow\rangle \otimes |B{:}\uparrow\rangle = \frac{|A{:}+\rangle|B{:}+\rangle + |A{:}+\rangle|B{:}-\rangle - |A{:}-\rangle|B{:}+\rangle - |A{:}-\rangle|B{:}-\rangle}{2} \tag{30}$$

$$\Longrightarrow \quad |\Psi_1\rangle = \frac{|A{:}+\rangle|B{:}+\rangle - |A{:}-\rangle|B{:}-\rangle}{\sqrt{2}} \tag{31}$$

$$\Longrightarrow \quad |\Psi_2\rangle = \frac{-|A{:}+\rangle|B{:}-\rangle + |A{:}-\rangle|B{:}+\rangle}{\sqrt{2}} \tag{32}$$

Trots att spinnvektorerna är ”antiparallella” med avseende på z-axeln i båda fall finns det en skillnad mellan deras riktningar med avseende på x-axeln: ”parallella” i fallet av $|\Psi_1\rangle$ och ”antiparallella” i fallet av $|\Psi_2\rangle$. Detta förklarar hur det är möjligt att $S = 1$ i första fallet: ett nollskilt spinnrörelsemängdsmoment ligger någonstans i x-y planet.

7. Anta att vi har ett två-qubit system. I beräkningsbasen ges qubit-tillstånden och Hadamard-operatorn av:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

(a) (2 poäng) Vilken superposition skapas när man tillämpar Hadamard-operatorn till båda qubitar i tillståndet $|0\rangle \otimes |1\rangle$?

Lösning: Hadamard-operatorn på det hela systemet ger

$$\left(\hat{U}_H \otimes \hat{U}_H\right)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{34}$$

$$= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \tag{35}$$

$$= \frac{|\text{'}0\text{'}\rangle - |\text{'}1\text{'}\rangle + |\text{'}2\text{'}\rangle - |\text{'}3\text{'}\rangle}{2}. \tag{36}$$

(Detta är en superposition av alla möjliga binära tal som kan representeras med två bitar.)

(b) (2 poäng) Vad innebär resultatet i (a) för kvantberäkning? Varför är det viktigt att qubitar hållas isolerade från omgivningen?

Lösning: I princip kan datorn utföra beräkningar *parallellt*, dvs. på alla tal på en gång. Problemet är att qubitarna måste hållas isolerade så att superpositionen inte kollapsar: en växelverkan med omgivingen är en typ mätning.

Med Deutschs algoritm kan vi bestämma om en funktion f, som ger antingen 0 eller 1 som output, är *konstant* eller *balanserad*. "Konstant" betyder att funktionen ger samma output oavsett input, $f(x) = 1,\ \forall x$ eller $f(x) = 0,\ \forall x$. "Balanserad" betyder att funktionen ger 1 för hälften av alla möjliga x och 0 för den andra hälften.

Algoritmen fungerar på följande sätt för en en-bit f (*one-bit*, dvs. $x = 0$ eller $x = 1$):

1. Dataregistret x och kontrollregistret y är laddade med qubitarna $|0\rangle$ respektive $|1\rangle$: $|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$.
2. En Hadamard grind tillämpas på båda qubitar: $|\Psi\rangle = \hat{U}_H |0\rangle \otimes \hat{U}_H |1\rangle$.
3. Funktionen tillämpas så att kontrollregistret blir $y' = [y + f(x)] \mod 2$.
4. En till Hadamard grind tillämpas på dataregistret.

(c) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 3, för någon konstant f och någon balanserad f.

Lösning: Efter steg 2 har vi att

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2}. \tag{37}$$

Om $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{38}$$

Om $f(0) = f(1) = 0$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{39}$$

Om $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle}{2} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{40}$$

Om $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{41}$$

(d) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 4, för båda fallen i (c).

Lösning: Om $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{42}$$

Om $f(0) = f(1) = 0$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{43}$$

Om $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{44}$$

Om $f(0) = 1$ och $f(1) = 0$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{45}$$

(e) (2 poäng) Givet (d), hur skulle vi bestämma om funktionen är konstant eller balanserad?

Lösning: Mät dataregistret. Om det är 0 (1) är funktionen konstant (balanserad).

Formelblad

- **Diracs deltafunktion**:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx, \qquad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \tag{1}$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \qquad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \tag{2}$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \qquad \hat{a}\, |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \tag{3}$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:
$\hat{J}_i|\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:
$\hat{J}_i|\hat{L}_i|\hat{S}_i = \hbar\sigma_i$.

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

- Hamiltonianen i **sfäriska koordinater**:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \tag{6}$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{7}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{8}$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**
  Kvadratroten är antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1			
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0	
1/2	1/2	1	0	0	
	1/2	−1/2	1/2	1/2	1
	−1/2	1/2	1/2	−1/2	−1
			−1/2	−1/2	1

tabell-förklaring:		S
		M_S
m_1	m_2	$C^{s_{1,2},S}_{m_{1,2},M}$

$s_1 = 1$		3/2					
$s_2 = \frac{1}{2}$		3/2	3/2	1/2			
1	1/2	1	1/2	1/2			
	1	−1/2	1/3	2/3	3/2	1/2	
	0	1/2	2/3	−1/3	−1/2	−1/2	
			0	−1/2	2/3	1/3	3/2
			−1	1/2	1/3	−2/3	−3/2
					−1	−1/2	1