Kvantfysik

Tentamen Oktober 2023

Kurs: TIF395
Tid: 2023/10/23, 0830 – 1230
Ansvarig: Tom Blackburn
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, miniräknare, bifogade formelblad
Totalt antal frågor: 7
Total poäng: 50

Instruktioner:
Varje fråga består av 10 poäng. Svara på så många som du vill. De bästa fem kommer att räknas.

1. (a) (2 poäng) Vilka kvanttillstånd uppfyller den *tidsberoende* respektive den *tidsoberoende* Schrödinger-ekvationen?

Solution: Alla kvanttillstånd uppfyller den tidsberoende Schrödinger-ekvationen. Det är bara energiegentillstånd som uppfyller den tidsoberoende.

(b) (1 poäng) Varför är det viktigt att alla tillstånd är normerade?

Solution: Så att den totala sannolikheten är ett.

(c) (3 poäng) Hermitska operatorer har tre viktiga egenskaper! Vad är de och varför är de viktiga?

Solution: Alla egenvärden är reella; egentillstånd som motsvarar olika egenvärden är ortogonala; egentillstånden bildar en fullständig bas. Så att de kan tolkas som de möjliga utfallen av en mätning; så att upprepade mätningar ger samma resultat; så att alla tillstånd kan representeras som en linjär kombination av dessa tillstånd.

(d) (2 poäng) Inom klassisk fysik går det att veta alla sex "fasrumskoordinater" (x, y, z, p_x, p_y, och p_z) exakt och samtidigt. Hur många får vi veta exakt och samtidigt inom kvantfysik? Motivera ditt svar.

Solution: 3. Kommuteringsförhållandet $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ betyder att man får veta antingen positionen eller rörelsemängden längs en axel, vilket gäller för alla tre.

(e) (2 poäng) Din kollega Dr Knowitall påstår att, om en mätning av en partikels energi ger som utfall E, då måste partikeln har haft energi E även före mätningen. Har han rätt eller inte? Motivera ditt svar.

Solution: I allmänhet, nej. Om vi tror på våra Bells experiment har energin före mätningen inget bestämt värde alls - det skapas när systemet mäts. (Undantag: ja, om han redan utfört en energimätning och kollapsat tillståndet.)

2. En elektron är bunden i en endimensionell, kvadratisk potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$ med naturlig frekvens ω_0. I vissa fall kan elektronen falla från energinivån n_1 till n_2 och avge ljus. Övergången är tillåten om matriselementen

$$\langle n_2| \hat{x} |n_1\rangle \tag{1}$$

är nollskild.

Tips: Dr Knowitall skulle vilja påminna dig att stegoperatorer är dina vänner.

(a) (3 poäng) Bestäm matriselementen för en godtycklig övergång $n_1 \to n_2$ ($n_2 < n_1$). Ange vilka övergångar är tillåtna.

Solution:

$$\langle n_2| \hat{x} |n_1\rangle = L \langle n_2| (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) |n_1\rangle \tag{2}$$
$$= L \langle n_2| \left(\sqrt{n_1}\,|n_1 - 1\rangle + \sqrt{n_1 + 1}\,|n_1 + 1\rangle\right) \tag{3}$$
$$= L \left(\sqrt{n_1}\delta_{n_2,n_1-1} + \sqrt{n_1 + 1}\delta_{n_2,n_1+1}\right). \tag{4}$$
$$\implies \langle n_2| \hat{x} |n_1\rangle = \sqrt{n_1\hbar/(2m\omega_0)} \qquad \text{om } n_2 = n_1 - 1 \tag{5}$$

Overgångar där $n_1 \to n_1 - 1$ är tillåtna.

(b) (3 poäng) Hur mycket förändras $\langle x^2\rangle$ i en tillåten övergång?

Solution: Expandera $\hat{x}^2$ och försumma termer som inte har lika många $\hat{a}$ som $\hat{a}^\dagger$ pga egentillståndens ortogonalitet:

$$\langle x^2\rangle = L^2 \langle n| \cdots + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \cdots |n\rangle \tag{6}$$
$$= (2n + 1)L^2 \tag{7}$$

I en tillåten övergång förminskas väntevärdet: $\Delta\langle x^2\rangle = 2L^2$.

(c) (2 poäng) Beskriv ytterligare hur vågfunktionen förändras i en tillåten övergång. Det kan vara hjälpsamt att skissa ett exempel.

Solution: Antalet noder förminskas och vågfunktionen byter paritet.

(d) (2 poäng) Anta att vi har många sådana brunnar med fjäderkonstant $k = 11.5$ N/m samt att alla elektroner har blivit exciterade till högre energinivåer. Rita en graf av spektrumet av ljuset som elektronerna avger, som funktion av ljusets våglängd. Ange våglängderna av alla toppar grafen visar.

Solution: Alla övergångar leder till att fotoner med energi $E = \hbar\omega_0(n_1 - n_2) = \hbar\omega_0$ utges. $k = m\omega_0^2 \implies \omega_0 = 3.56 \times 10^{15}$ rad/s. Spektrumet har bara en topp, vid en våglängd $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 530$ nm.

3. En annan elektron har spinntillståndet

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle \tag{8}$$

vid $t = 0$, där $|\uparrow\rangle$ och $|\downarrow\rangle$ betyder att elektronen är spinn-upp respektive spinn-ner längs z-axeln. Hamiltonianen är

$$\hat{H} = i\varepsilon\Big(- |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\Big) \tag{9}$$

där ε är reell och positiv.

Vad är de möjliga utfallen och de motsvarande sannolikheterna om:

(a) (4 poäng) ... vi mäter elektronens energi vid $t = 0$?

Solution: Hamiltonianen är i matrisform $\varepsilon\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ och har egenvektorer $e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$, $e_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ samt egenvärden ε respektive $-\varepsilon$. Sannolikheten att få ε ges av överlappningen $P = |\langle e_+|\uparrow\rangle|^2 = 1/2$. Då har vi att sannolikheten att få $-\varepsilon$ också är $1/2$.

(b) (4 poäng) ... vi mäter z-komponenten av spinnet, S_z, vid allmän tidspunkt t?

Solution: Genom att skriva $|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_+\rangle + |e_-\rangle)$ finner vi att det tidsberoende tillståndet är

$$|\psi; t\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} \tag{10}$$

där wiggle-faktorerna beror på en frekvens $\omega = \varepsilon/\hbar$. De möjliga utfallen är $\hbar/2$ och $-\hbar/2$ med sannolikheter $\cos^2\omega t$ respektive $\sin^2\omega t$.

(c) (2 poäng) Dr Knowitall säger att det inte spelar någon roll vid vilken tid energimätningen utförs och menar att utfallen och sannolikheterna är oförändrade. Har han rätt? Förklara ditt svar.

Solution: Den gode doktorn har rätt! Eftersom Hamiltonianen inte beror på tid beror inte energiegenvärdena på tid. Ett energiegentillstånds tidsberoende är en fasfaktor som försvinner när sannolikheten beräknas.

4. Ett exempel på en "enkel" potentialbrunn där enkla analytiska lösningar saknas för energinivåerna är

$$V(x) = \frac{V_0\, x^4}{a^4}, \tag{11}$$

där V_0 och a är konstanter med enheter av energi respektive längd.

Tips: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}\, dx = 3\sqrt{\pi}/4$

(a) (6 poäng) Använd variationsmetoden och ansatsvågfunktionen $\psi_0(x) = N\exp(-\alpha x^2)$ för att uppskatta grundtillståndets energi.

Solution: Börja med normeringsfaktorn: $N^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\alpha x^2)dx = N^2\sqrt{\pi/(2\alpha)} = 1$. Rörelseenergins väntevärde är

$$\begin{aligned}
\langle T\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-\alpha x^2}\, dx && (12)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(2\alpha)^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-1+2\alpha x^2\right)e^{-2\alpha x^2}\, dx && (13)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(2\alpha)^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\right) && (14)\\
&= \frac{\hbar^2\alpha}{2m} && (15)
\end{aligned}$$

och potentialenergins

$$\begin{aligned}
\langle V\rangle &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0\, x^4}{a^4}e^{-2\alpha x^2}\, dx && (16)\\
&= \frac{3V_0}{16\alpha^2 a^4}. && (17)
\end{aligned}$$

Den totala energin minimeras när $\frac{\hbar^2}{2m} - \frac{3V_0}{8a^4}\alpha^{-3} = 0 \implies \alpha = [3mV_0/(4\hbar^2 a^4)]^{1/3}$. Den motsvarande energin är $E = [81V_0\hbar^4/(256m^2a^4)]^{1/3}$.

(b) (1 poäng) Är ditt svar högre eller lägre än den riktiga grundtillståndsenergin?

Solution: Högre.

(c) (3 poäng) Visa att vågfunktionen uppfyller osäkerhetsprincipen.

Solution: Från (a) har vi att $\left\langle p^2\right\rangle = 2m\langle T\rangle = \hbar^2\alpha$. Sedan beräknar vi

$$\left\langle x^2\right\rangle = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2}dx = \frac{1}{4\alpha} \tag{18}$$

vilket ger $\sigma_x\sigma_p = \hbar/2 \geq \hbar/2$. Osäkerhetsprincipen är alltså uppfylld.

5. Ett par spinn-$1/2$ partiklar är förberedda så att dess spinntillstånd är

$$|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|A\colon\uparrow\rangle \otimes |B\colon\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\,|A\colon\downarrow\rangle \otimes |B\colon\uparrow\rangle \tag{19}$$

där (t ex) $|A\colon\uparrow\rangle$ betyder att partikel A är spinn-upp med avseende på z-axeln.

(a) (1 poäng) Är tillståndet *sammanflätat* eller *separerbart*?

Solution: Sammanflätat!

(b) (3 poäng) Om vi mäter spinnprojektionen längs z för partikel A, $S_z^{(A)}$, vad är de möjliga utfallen och de motsvarande sannolikheterna? Om vi *sedan* mäter spinnprojektionen längs z för partikel B, $S_z^{(B)}$, vad är de möjliga utfallen och de motsvarande sannolikheterna?

Solution: Vi får som utfall antingen $\hbar/2$, med sannolikhet $3/4$, eller $-\hbar/2$, med sannolikhet $1/4$. Om det var $\hbar/2$ för partikel A ger mätningen av partikel B $-\hbar/2$ med 100% sannolikhet. Om det var $-\hbar/2$ för partikel A ger mätningen av partikel B $\hbar/2$ med 100% sannolikhet.

(c) (6 poäng) Ditt svar övertygar din kollega Dr Knowitall att systemets totala spinnbelopp måste vara noll. Om vi mäter beloppet av systemets totala spinn, $|\mathbf{S}^{(A)} + \mathbf{S}^{(B)}|$, vad är de möjliga utfallen och de motsvarande sannolikheterna? Har den gode doktorn rätt eller fel?

Solution: Clebsch-Gordan tabellerna ger att

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{|1,0\rangle + |0,0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{|1,0\rangle - |0,0\rangle}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

$$\implies |\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\,|1,0\rangle + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\,|0,0\rangle \tag{22}$$

Eftersom beloppet är $\sqrt{S(S+1)}\hbar$ är de möjliga utfallen $\sqrt{2}\hbar$ ($P = 1/2 + \sqrt{3}/4$) och 0 ($P = 1/2 - \sqrt{3}/4$). Den gode doktorn har fel.

6. En väteatom är störd av ett svagt elektriskt fält E_0 som är riktat längs z-axeln. Vi antar att det är bara elektronen som påverkas så att det finns en till term i Hamiltonianen $\hat{H}' = -eE_0 z = -eE_0\, r\cos\theta$.

   (a) (1 poäng) Vad är degenerationsgraden av det ostörda grundtillståndet? Du behöver inte ta hänsyn till elektronens spinn.

   Solution: 1 (icke-degenererat).

   (b) (2 poäng) Bestäm första ordningens korrigering till grundtillståndets energi. Förklara ditt svar fysikaliskt.

   Solution: Första ordningens korrigering är störningens väntevärde:

$$E^{(1)} = -eE_0 \iiint r\cos\theta\, |\psi_{1,0,0}(\mathbf{r})|^2\, d^3\mathbf{r}. \tag{23}$$

   Men grundtillståndet har inget vinkelberoende! Integralen innehåller en faktor $\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 0$ och därför är korrigeringen noll. Det är rimligt för att det är lika sannolikt att elektron befinner sig där energin är högre ($z > 0$) som där den är lägre ($z < 0$).

   (c) (5 poäng) Det störda grundtillståndet kan uppskattas med första ordningens störningsteori. Det går att visa att:

$$|\psi_g\rangle = |1,0,0\rangle + B\,|2,1,0\rangle + \cdots \tag{24}$$

   där varje term är något tillstånd med kvanttalen $|n, \ell, m_\ell\rangle$. Bestäm konstanten B.
   Tips: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$

   Solution: Vi söker ett bidrag till första ordningens korrigering till tillståndet:

$$B = \frac{\langle 2,1,0|\, \hat{H}'\, |1,0,0\rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}. \tag{25}$$

   Matriselementen

$$\langle 2,1,0|\, \hat{H}'\, |1,0,0\rangle = -eE_0 \iiint \psi^\star_{2,1,0}(\mathbf{r})\, r\cos\theta\, \psi_{1,0,0}(\mathbf{r})\, d^3\mathbf{r} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &= -eE_0 \int_0^\infty r^3 R_{2,1}(r) R_{1,0}(r)\, dr \\ &\quad \times \int_0^\pi Y_1^{0,\star} \cos\theta\, Y_0^0 \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \end{aligned} \tag{27}$$

Slå upp de radiella vågfunktionerna och klotytefunktionerna:

$$r \text{ integral} = \frac{1}{\sqrt{6}a_0^4}\int_0^\infty r^4 e^{-3r/(2a_0)}\,dr = \frac{128}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}a_0 \tag{28}$$

$$\theta \text{ integral} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \tag{29}$$

$$\phi \text{ integral} = 2\pi. \tag{30}$$

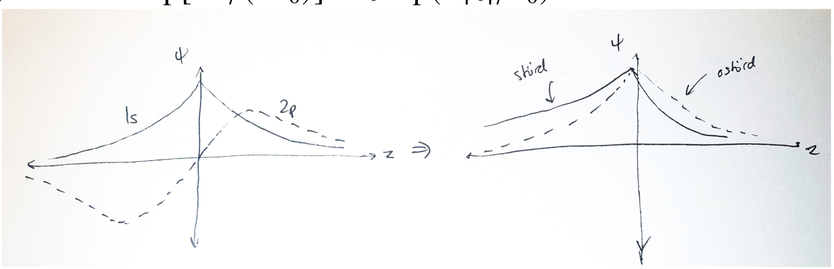
I slutet har vi

$$B = -\frac{128\sqrt{2}}{243}eE_0a_0\left(-\frac{\hbar^2}{2ma_0^2}+\frac{\hbar^2}{8ma_0^2}\right)^{-1} \tag{31}$$

$$= \frac{1024\sqrt{2}}{729}\frac{eE_0ma_0^3}{\hbar^2} \tag{32}$$

(d) (2 poäng) Skissa hur de ostörda och störda grundtillstånden ser ut (längs z-axeln, eller i tre dimensioner om du känner dig konstnärlig). Förklara det du finner.

Solution: $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) \propto \exp(-r/a_0) \propto \exp(-|z|/a_0)$ längs z-axeln. På samma sätt $\psi_{2,1,0}(\mathbf{r}) \propto r\cos\theta\exp[-r/(2a_0)] \propto z\exp(-|z|/a_0)$.



Vågfunktionen blir förskjutad så att det är mer sannolikt att hitta elektronen i området där potentialenergin är lägre.

7. Anta att vi har ett två-qubit system. I beräkningsbasen ges qubit-tillstånden och Hadamard-operatorn av:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \tag{33}$$

(a) (2 poäng) Vad är det för superposition som skapas när man tillämpar Hadamard-operatorn till båda qubitar i tillståndet $|0\rangle \otimes |0\rangle$?

Solution: Hadamard-operatorer på hela systemet ger:

$$\left(\hat{U}_H \otimes \hat{U}_H\right)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{34}$$

$$= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \tag{35}$$

$$= \frac{|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{2}. \tag{36}$$

(Det är en superposition av alla möjliga binära tal som kan representeras med två bitar.)

(b) (2 poäng) Vad innebär resultatet i (a) för kvantberäkning? Och varför måste qubitar hållas isolerade från omgivingen?

Solution: Kvantdatorer kan utföra beräkningar parallellt, på alla tal på en gång. Problemet är att qubitarna måste hållas isolerade så att superpositionen inte kollapsar: en växelverkan med omgivningen är i alla fall en typ mätning.

Med Deutschs algoritm kan vi bestämma om en funktion f, som ger antingen 0 eller 1 som output, är *konstant* eller *balanserad*. "Konstant" betyder att funktionen ger samma output oavsett input, $f(x) = 1, \ \forall x$ eller $f(x) = 0, \ \forall x$. "Balanserad" betyder att funktionen ger 1 för hälften av alla möjliga x och 0 för den andra hälften.

Algoritmen funkar på följande sätt för en en-bit f (*one-bit*, dvs $x = 0$ eller $x = 1$):

1. Dataregistret x och kontrollregistret y är laddade med qubitarna $|0\rangle$ respektive $|1\rangle$: $|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$.
2. En Hadamard grind tillämpas på båda qubitar: $|\Psi\rangle = \hat{U}_H |0\rangle \otimes \hat{U}_H |1\rangle$.
3. Funktionen tillämpas så att kontrollregistret blir $y' = [y + f(x)] \mod 2$.
4. En till Hadamard grind tillämpas på dataregistret.

(c) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 3, för någon konstant f och någon balanserad f.

Solution: Efter steg 2 har vi att

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2}. \quad (37)$$

Om t ex $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

Om t ex $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle}{2} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (39)$$

(d) (2 poäng) Bestäm systemets tillstånd efter steg 4, för samma fall som i (c).

Solution: Om $f(0) = f(1) = 1$ (konstant):

$$|\Psi\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (40)$$

Om $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (balanserad):

$$|\Psi\rangle = |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (41)$$

(e) (2 poäng) Givet (d), hur skulle vi bestämma om funktionen är konstant eller balanserad?

Solution: Kolla dataregistret. Om det är 0 (1) är funktionen konstant (balanserad).

END

Formelblad

- **Diracs deltafunktion**:

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx, \qquad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \tag{1}$$

- **Stegoperatorer** för en harmonisk oscillator, $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2$:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}}{2L} - \frac{iL\hat{p}}{\hbar}, \qquad \hat{a} = \frac{\hat{x}}{2L} + \frac{iL\hat{p}}{\hbar} \tag{2}$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{3}$$

där $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega_0)}$.

- **Paulimatriser** för j eller $s = 1/2$:
$\hat{J}_i|\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- **Paulimatriser** för j, ℓ eller $s = 1$:
$\hat{J}_i|\hat{L}_i|\hat{S}_i = \hbar\sigma_i$.

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

- **Clebsch-Gordan tabeller**
Kvadrot antagen för varje koefficient. Minustecken ska stå framför roten.

$s_1 = \frac{1}{2}$		1			
$s_2 = \frac{1}{2}$		1	1	0	
1/2	1/2	1	0	0	
	1/2	−1/2	1/2	1/2	1
	−1/2	1/2	1/2	−1/2	−1
			−1/2	−1/2	1

$s_1 = 1$		3/2					
$s_2 = \frac{1}{2}$		3/2	3/2	1/2			
1	1/2	1	1/2	1/2			
	1	−1/2	1/3	2/3	3/2	1/2	
	0	1/2	2/3	−1/3	−1/2	−1/2	
			0	−1/2	2/3	1/3	3/2
			−1	1/2	1/3	−2/3	−3/2
					−1	−1/2	1

- Hamiltonianen i **sfäriska koordinater**:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(\mathbf{r}), \tag{6}$$

där

$$\hat{p}_r^2 = \left[-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right]^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{7}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{8}$$