CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TIF390 Matematisk fysik och speciell relativitetsteori

Examinator: Gabriele Ferretti rum: Origo 6111
tel. 0721582259 email: ferretti@chalmers.se

OBS: Nästa granskningstillfälle: 2024-02-02, kl 17:00 i Origo 6115

Hjäpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare med tomt minne.

Betygsgränser:

Betygsgränser (tentamen+bonuspoäng):
24 poäng: 3
36 poäng: 4
48 poäng: 5

1

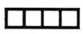
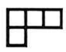
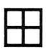
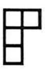
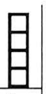
För

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beräkna $\frac{d}{dx}\exp(xA)$.

2

Karaktärtabellen för S_4 är

					
D_1	1	1	1	1	1
D_2	1	-1	1	1	-1
D_3	3	1	-1	0	-1
D_4	3	-1	-1	0	1
D_5	2	0	2	-1	0

där kolumnerna indikerar konjugatklasserna och raderna indikerar motsvarande irreducibla representationer.
a) Vad är dimensionen av de irreducibla representationerna? (d.v.s. storleken på matriserna).
b) Är D_2 trogen?
c) Sönderdela $D_5 \otimes D_5$.

3

För vilket värde av λ har följande ekvationen inga lösningar?

$$\phi(x) = x + \lambda \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} \phi(y) dy$$

Lös ekvationen exact för alla andra λ värden. Visa också att lösningen matchar dem första två termerna i Born approximationen.

4

Bestäm det approximativa värdet för följande integral för stora n.

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + nx^2)^{42}} dx$$

5

En ω meson sönderfaller till tre pioner, två laddade och en neutral: $\omega \to \pi^+ \pi^- \pi^0$. De laddade pionerna π^+, π^- är långlivade och man mäter deras rörelsemängd $\mathbf{p}_{\pi^+} = (3.92, 12.4, 66.2)$ MeV, $\mathbf{p}_{\pi^-} = (-34.5, -44.6, 1038.0)$ MeV. Vi vet också att deras massa är $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.57$ MeV. Däremot är den neutrala pionen π^0 instabil och sönderfaller omedelbart till två fotoner ($\pi^0 \to \gamma_1 \gamma_2$) med rörelsemängd som vi uppmäter till $\mathbf{p}_{\gamma_1} = (43.5, 75.1, 64.7)$ MeV, $\mathbf{p}_{\gamma_2} = (-43.1, 30.5, -38.2)$ MeV. Utifrån dessa mätningar beräkna:

a) π^0 massan

b) ω massan

6

För

$$F_{\mu\nu} := \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

(där $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ som vanligt), beräkna T^{12}, där

$$T^{\mu\rho} = -F^{\mu\nu} F^{\rho}{}_{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}$$

är stressenergi tensorn. Visa också att $T^{\mu}_{\mu} = 0$.

Problem 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0, 1, 2.$

Eigenvectors: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \Omega \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Omega^T,$$

with $\Omega = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

$$\Rightarrow e^{xA} = \Omega \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{1x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0x} \end{pmatrix} \Omega^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2x} & 0 & e^{2x}-1 \\ 0 & 2e^{x} & 0 \\ e^{2x}-1 & 0 & 1+e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{xA}\right) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Alternative solution:

notice $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ For $n \ngtr 0$

$A^0 = \mathbb{1}$.

$$\Rightarrow e^{xA} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

= as before.

$$\left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} x^n 2^{n-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!}(2x)^n - 1 \right) \right.$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$$ on the diagonal.

$$\left. 0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} x^n 2^{n-1} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1) \right.$$ off the diagonal).

PROBLEM 2

a) Read the first column, since

$\mathrm{tr}_R \mathbb{1} = \dim R$: $\Rightarrow$

$\dim D_1 = 1$, $\dim D_2 = 1$, $\dim D_3 = 3$

$\dim D_4 = 3$, $\dim D_5 = 2$.

b) <u>No</u> since $\dim D_2 = 1 \Rightarrow D_2$ ABELIAN

BUT S_4 IS NOT ABELIAN.

c) $\chi(D_5 \otimes D_5) = (4, 0, 4, 1, 0) =$

$= \chi(D_1) + \chi(D_2) + \chi(D_5) =$

$\Rightarrow D_5 \otimes D_5 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_5$.

PROBLEM 3

Separable kernel : $e^{-x} \cdot e^{-y}$.

$$\phi(x) = x + \lambda e^{-x} \int e^{-y} \phi(y)\, dy.$$

$$\underbrace{\int_0^\infty e^{-x} \phi(x) dx}_{= C} = \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x} dx}_{= 1} + \lambda \underbrace{\int_0^\infty e^{-2x} dx}_{= 1/2} \int_0^\infty e^{-y} \phi(y) dy$$

$$\Rightarrow \quad C = 1 + \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot C$$

solutions for $\lambda \neq +2$

$$C = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = x + \lambda e^{-x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

$$= x + \frac{2\lambda}{2-\lambda} e^{-x} \cong x + \lambda e^{-x} + \dots$$

BORN series: $\phi_0(x) = x$

$$\phi_1(x) = x + \lambda \int_0^\infty e^{-(x+y)} y\, dy = x + \lambda e^{-x} \quad \text{OK.}$$

PROBLEM 4.

Write $I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-S_m(x)} dx$.

where $S_m(x) = 42 \log(1+mx^2) - \log \cos x$.

$$S'_m(x) = \frac{84mx}{(1+mx^2)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$S''_m(x) = 84m \frac{1-mx^2}{(1+mx^2)^2} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

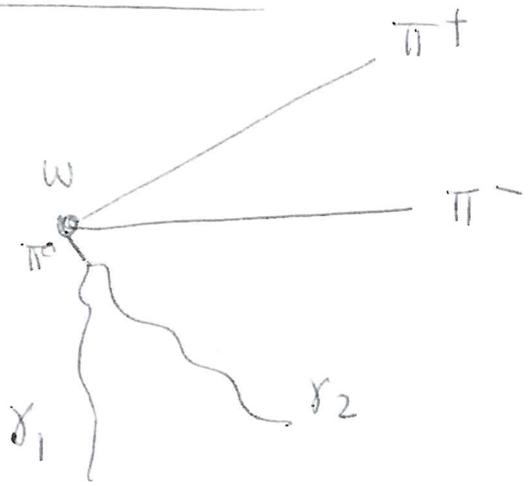
$S'_m(x) = 0$ for $x = 0$ (Clearly a max value of the integrand OK).

$$S_m(0) = 42 \log 1 - \log 1 = 0.$$

$$S''_m(0) = 84m - 1 \simeq 84m.$$

$$\Rightarrow I_m \simeq e^{-S_m(0)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{S''_m(0)}} = \sqrt{\frac{\pi}{42m}}.$$

PROBLEM 5.



All units in MeV.

$$E_{\gamma_1} = |\mathbb{P}_{\gamma_1}| = \sqrt{(43.5)^2 + (75.1)^2 + (64.7)^2} = 108.$$

$$E_{\gamma_2} = |\mathbb{P}_{\gamma_2}| = \ldots = 65.2$$

$$P^{\mu}_{\pi^0} = P^{\mu}_{\gamma 1} + P^{\mu}_{\gamma 2} = \left(E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2},\ \mathbb{P}_{\gamma_1} + \mathbb{P}_{\gamma_2} \right) =$$

$$= \left(173,\ 0.4,\ 106,\ 26.5 \right)$$

$$m^2_{\pi^0} = P^{\mu}_{\pi^0} P_{\pi^0 \mu} = 173^2 - \cancel{0.4}^2 - 106^2 - 26.5^2$$

$$= 17998 \Rightarrow m_{\pi^0} = 134 \text{ MeV}$$

$$E_{\pi^-} = \sqrt{m^2_{\pi^-} + \mathbb{P}^2_{\pi^-}} = \sqrt{139^2 + 34.5^2 + 44.6^2 + 1038.^2}$$
$$= 1049 \text{ MeV}$$

$$E_{\pi^+} = \ldots = 155 \text{ MeV}$$

$$P^{\mu}_{\pi^-} = (1049, -34.5, -44.6, 1038)$$

$$P^{\mu}_{\pi^+} = (155, 3.92, 12.4, 66.2)$$

$$P^{\mu}_{\omega} = P^{\mu}_{\pi^+} + P^{\mu}_{\pi^0} + P^{\mu}_{\pi^-} = (1376, -30.18, 73.9, 1131)$$

$$m_{\omega} = \sqrt{P^{\mu}_{\omega} P_{\omega_\mu}} =$$

$$= \sqrt{1376^2 - 30.18^2 - 73.9^2 - 1131^2} = 780$$

$$m_{\omega} = 780 \text{ MeV}$$

PROBLEM 6

$$T^{12} = -F^{1\nu}F^{2}{}_{\nu} + \cancel{\frac{1}{2}\underset{=0}{\eta^{12}} F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda}} =$$

$$= -F^{10}F^{2}{}_{0} - \cancel{\underset{=0}{F^{11}}F^{2}{}_{1}} - \cancel{F^{12}\underset{=0}{F^{2}{}_{2}}} - F^{13}F^{2}{}_{3}$$

$$= -(-F_{10})(-F_{20}) - (+F_{13})(-F_{23}) =$$

$$= -F_{10}F_{20} + F_{13}F_{23} =$$

$$= -(-E_x)(-E_y) + (B_y)(-B_x)$$

$$= -(E_xE_y + B_xB_y)$$

Also: $$T^{\mu}{}_{\mu} = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\underbrace{\eta_{\mu\rho}\eta^{\mu\rho}}_{=4}F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda}$$

$$= -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda} = 0$$