CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TIF390 Matematisk fysik och speciell relativitetsteori

April 5 2024

Examinator: Gabriele Ferretti rum: Origo 6111
tel. 0721582259 email: ferretti@chalmers.se

OBS: Nästa granskningstillfälle: 2024-05-03, kl 17:00 i Origo 6115

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare med tomt minne.

Betygsgränser:

Betygsgränser (tentamen+bonuspoäng):
24 poäng: 3
36 poäng: 4
48 poäng: 5

1 (8 poäng)

Betrakta matrisen

$$U = \exp\left(i\alpha \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\right)$$

där $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Visa att $U^\dagger = U^{-1}$.
2) Beräkna $\operatorname{tr} U$ och $\det U$.

2 (9 poäng)

Betrakta

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

som ett element av permutationsgruppen S_7.

1) Skriv g som produkt av disjunkta cyklar.
2) Skriv g som en matris i den reguljära representationen av S_7
3) Rita Young Tableaux:n som beskriver konjugatklassen av g.

3 (8 poäng)

Beräkna
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\delta'(x^2-1)\,dx$$

(Observera att δ' är derivatan av Dirac δ med avseende på x.)

4 (8 poäng)

Visa att integralekvationen
$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^{\infty} (x-y)e^{-x-y}\phi(y)\,dy$$
har en lösning för alla $\lambda \in \mathbf{R}$ och lös den för $\lambda = 4$.

5 (9 poäng)

Den subatomära partikeln ρ^0 sönderfaller till två pioner: $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Den ena pionen har rörelsemängd $\mathbf{p} = (400, 0, 0)$ MeV (d.v.s. längs $\hat{x}$) och den andre $\mathbf{q} = (0, 650, 0)$ MeV (d.v.s. längs $\hat{y}$). Pionernas massa är $m_{\pi^\pm} = 140$ MeV.

Bestäm ρ^0 massan, samt ρ^0 hastigheten vid sönderfall.

6 (8 poäng)

Vad är den minsta energi som krävs för att en positron e^+ som kolliderar med en elektron i vila ska skapa ett myon/antimyon par? Processen är $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$. $m_{e^\pm} = 0.511$ MeV, $m_{\mu^\pm} = 105$ MeV,

PROBLEM 1

Let $\tau = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, note $\tau^\dagger = \tau$.

1) $U = e^{i\alpha\tau} \Rightarrow U^\dagger = e^{-i\alpha^*\tau^\dagger} = e^{-i\alpha\tau} = U^{-1}$

since α is real and τ hermitian.

2) τ is hermitian and has eigenvalues $= 0$ and 2.

$\Rightarrow \exists\, \Omega$ unitary s.t. $\tau = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Omega^\dagger$.

$$\Rightarrow U = \Omega \begin{pmatrix} e^{i\alpha\cdot 0} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha\cdot 2} \end{pmatrix} \Omega^\dagger =$$

$$= \Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \Omega^\dagger.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} U = \operatorname{tr}\left(\cancel{\Omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \cancel{\Omega^\dagger}\right) = 1 + e^{2i\alpha}$$

$$\det U = \det\left(\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \Omega^\dagger\right) =$$

$$= \det\Omega \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \det\Omega^\dagger =$$

$$= 1 \cdot e^{2i\alpha} \cdot 1 = e^{2i\alpha}$$

PROBLEM 2

1) Note: $1 \to 3 \to 5 \to 7$ and $2 \to 4 \to 6$

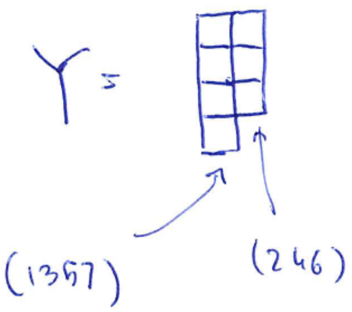
$\Rightarrow \quad g = (1\,3\,5\,7)(2\,4\,6)$

2) Let $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad |7\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

We need a matrix $M: |1\rangle \to |3\rangle$ etc.

$$M(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $Y =$



PROBLEM 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}\,\delta'(x^2-1)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{ax})'\,\delta(x^2-1)\,dx$$

$$= -a\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}\left(\frac{\delta(x-1)}{2}+\frac{\delta(x+1)}{2}\right) =$$

$$= -\frac{a}{2}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right) = -a\cosh a.$$

PROBLEM 4.

$$\varphi(x) = 1 + \lambda x e^{-x}\left(\int e^{-y}\varphi\right) - \lambda e^{-x}\left(\int y e^{-y}\varphi\right)$$

Multiply by e^{-x} and $\int dx$:

$$\int e^{-x}\varphi = \int e^{-x} + \lambda\left(\int x e^{-2x}\right)\left(\int e^{-y}\varphi\right) - \lambda\left(\int e^{-2x}\right)\left(\int y e^{-y}\varphi\right)$$

Multiply by $x e^{-x}$ and $\int dx$:

$$\int x e^{-x}\varphi = \int x e^{-x} + \lambda\left(\int x^2 e^{-2x}\right)\left(\int e^{-y}\varphi\right) - \lambda\left(\int x e^{-2x}\right)\left(\int y e^{-y}\varphi\right)$$

Set $C_1 = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx$, $C_2 = \int_0^\infty x e^{-x}\varphi(x)\,dx$

and do the other integrals:

$$\begin{cases} C_1 = 1 + \lambda \cdot \frac{1}{4} \cdot C_1 - \lambda \cdot \frac{1}{2} C_2 \\ C_2 = 1 + \lambda \cdot \frac{1}{4} \cdot C_1 - \lambda \cdot \frac{1}{4} C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{4} & 1 + \frac{\lambda}{4} \end{pmatrix}}_{\det = 1 - \frac{\lambda^2}{16} + \frac{\lambda^2}{8} = 1 + \frac{\lambda^2}{16} \neq 0 \text{ always.}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Set $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = 1 + 4 \cdot x e^{-x} \cdot 0 - 4 \cdot e^{-x} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 - 2 e^{-x}.$$

PROBLEM 5

$$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$$

$$K^\mu = p^\mu + q^\mu$$

$$p^\mu = \left(\sqrt{m_\pi^2 + p^2},\ p,\ 0,\ 0\right) \qquad p = 400\ \text{MeV}.$$

$$q^\mu = \left(\sqrt{m_\pi^2 + q^2},\ 0,\ q,\ 0\right) \qquad q = 650\ \text{MeV}.$$

$$m_\rho^2 = K^\mu K_\mu = (p+q)^2 = \left(\sqrt{m_\pi^2+p^2} + \sqrt{m_\pi^2+q^2}\right)^2 - p^2 - q^2$$

$$= m_\pi^2 + \cancel{p^2} + m_\pi^2 + \cancel{q^2} + 2\sqrt{(m_\pi^2+q^2)(m_\pi^2+p^2)} - \cancel{p^2} - \cancel{q^2}$$

$$= 2m_\pi^2 + 2\sqrt{(m_\pi^2+q^2)(m_\pi^2+p^2)} = 776\ \text{MeV}$$

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{K}}{K^0} : \qquad V_x = \frac{p}{\sqrt{m_\pi^2+p^2} + \sqrt{m_\pi^2+q^2}} = 0.367\ (\times c)$$

$$V_y = \frac{q}{\sqrt{m_\pi^2+p^2} + \sqrt{m_\pi^2+q^2}} = 0.597$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0.701 \cdot c.$$

PROBLEM 6

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$$

$$E > \frac{(m_{\mu^+} + m_{\mu^-})^2 - m_{e^-}^2 - m_{e^+}^2}{2 m_{e^+}} = \frac{4 m_\mu^2 - 2 m_e^2}{2 m_e}$$

$$\simeq 2 \frac{m_\mu^2}{m_e} = 43150 \text{ MeV} \simeq 43 \text{ GeV}$$