

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TIF390 Matematisk fysik och speciell relativitetsteori

Januari 13 2025

Examinator: Gabriele Ferretti rum: Origo 6111
tel. 0721582259 email: ferretti@chalmers.se

OBS: Nästa granskningstillfälle: 2025-01-31, kl 17:00 i Origo 6115

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare med tomt minne.

Betygsgränser:

Betygsgränser (tentamen + max 10 bonuspoäng):

28 poäng: 3

42 poäng: 4

56 poäng: 5

1 (12 poäng)

En viss grup, kallad T_h , som används i kemi, har följande karaktärtabellen.
($\omega = \exp(2\pi i/3)$)

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
R_1	1	1	1	1	1	1	1	1
R_2	1	ω	ω^*	1	1	ω	ω^*	1
R_3	1	ω^*	ω	1	1	ω^*	ω	1
R_4	3	0	0	-1	3	0	0	-1
R_5	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
R_6	1	ω	ω^*	1	-1	$-\omega$	$-\omega^*$	-1
R_7	1	ω^*	ω	1	-1	$-\omega^*$	$-\omega$	-1
R_8	3	0	0	-1	-3	0	0	1

där kolumnerna indikerar konjugatklasser och raderna irreducibla representationer.

- Vad är order av T_h ?
- Är T_h abelsk? (Tänk på storleken av representationer i tabellen.)
- Vad är $R_2 \otimes R_6$? (D.v.s. visa att dekompositionen av $R_2 \otimes R_6$ innehåller bara en irrep.)

2 (8 poäng)

Visa att

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 343$$

(D.v.s. Determinanten av "7 upphöjd till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ " är lika med 343.)

3 (10 poäng)Betrakta följande *Volterra* ekvation:

$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{-t} x \phi(t) dt.$$

Hitta lösningen $\phi(x)$ för $\lambda \ll 1$ till *andra* ordning i λ (d.v.s. inkl. λ^2).

4 (10 poäng)Bestäm det approximativa värdet för följande integral för stora n .

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{n(\cos x)^{42}} dx$$

5 (10 poäng)

Beräkna tröskelenergin som krävs för att skapa ett par $\Lambda \bar{\Lambda}$ partiklar genom att stråla protoner på väteatomer i vila. Processen är alltså $p + p \rightarrow p + p + \Lambda + \bar{\Lambda}$. Använd $m_p = 938$ MeV, $m_\Lambda = m_{\bar{\Lambda}} = 1116$ MeV. ($c = 1$ enheter).

6 (10 poäng)OBS: $c = 1$. Alla storheter (massa, rörelsemängd, energi) har enheter [MeV].

En Λ partikel (med massa $m_\Lambda = 1116$.) sönderfaller till en proton p och en pion π^- med respektive 3-rörelsemängd

$$\mathbf{p}_p = 1200. \hat{\mathbf{i}} - 400. \hat{\mathbf{j}} + 1000. \hat{\mathbf{k}}$$

och

$$\mathbf{p}_\pi = 200. \hat{\mathbf{i}} + 700. \hat{\mathbf{j}} - 600. \hat{\mathbf{k}}.$$

Beräkna Λ 3-hastigheten $\mathbf{v}$. (Massorna för p och π^- behövs ej för att lösa uppgiften.)

PROBLEM 1

1) The column k_i is the size of the matrices of the irrep.

$$\Rightarrow \text{ORDER} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 24$$

2) No because some of the irreps (R_4 and R_8) are more than one dimensional.

$$\begin{aligned} 3) \chi(R_2 \otimes R_6) &= (1, \omega^2, \omega^{*2}, 1, -1, -\omega^2, -\omega^{*2}, -1) \\ &= (1, \omega^*, \omega, 1, -1, -\omega^*, -\omega, -1) = \chi(R_7) \end{aligned}$$

(Because $\omega^2 = \omega^*$ and $\omega^{*2} = \omega$)

$$\Rightarrow R_2 \otimes R_6 = R_7.$$

PROBLEM 2

$$\det\left(7^{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}\right) = \det\left(e^{\log 7 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}\right) =$$

$$= e^{\log 7 \cdot \text{tr}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}} = e^{(\log 7) \cdot 3} = 7^3 = 343$$

NB writing $7 = e^{\log 7}$ is not strictly necessary, one can just write

$$\det\left(7^{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}\right) = 7^{\text{tr}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEM 3

$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{-t} x \phi(t) dt.$$

Zeroth order ($\lambda=0$): $\phi_0(x) = 1$.

First order:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \lambda \int_0^x e^{-t} x \phi_0(t) dt = 1 + \lambda x \int_0^x e^{-t} dt \\ &= 1 + \lambda x - \lambda x e^{-x}. \end{aligned}$$

Second order:

$$\phi_2(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{-t} x \phi_1(t) dt$$

$$= 1 + \lambda \int_0^x e^{-t} x (1 + \lambda t - \lambda t e^{-t}) dt =$$

$$= 1 + \lambda x (1 - e^{-x}) + \lambda^2 x \left(\frac{3}{4} - (1+x)e^{-x} + \frac{1}{4}(1+2x)e^{-2x} \right)$$

PROBLEM 4

$$\begin{aligned}
 I_m &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{m(\cos x)^{4/2}} dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{m(1 - \frac{x^2}{2})^{4/2}} dx = \\
 &= e^m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2imx^2} dx = e^m \sqrt{\frac{2\pi}{42m}} = e^m \sqrt{\frac{\pi}{21m}}
 \end{aligned}$$

PROBLEM 5

$$E_{\text{threshold}} = \frac{(m_p + m_p + m_\Lambda + m_{\bar{\Lambda}})^2 - m_p^2 - m_p^2}{2m_p} =$$

$$= \frac{m_p^2 + 4m_p m_\Lambda + 2m_\Lambda^2}{m_p}$$

$$= 8058 \text{ MeV.}$$

PROBLEM 6

$$\mathbf{P}_\Lambda = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_\pi = 1400 \hat{i} + 300 \hat{j} + 400 \hat{k} \text{ (MeV)}$$

$$E_\Lambda = \sqrt{m_\Lambda^2 + \mathbf{P}_\Lambda^2} = \sqrt{1116^2 + 1400^2 + 300^2 + 400^2}$$
$$= 1859 \text{ (MeV)}$$

$$\mathbf{v}_\Lambda = \frac{\mathbf{P}_\Lambda}{E_\Lambda} = 0.753 \hat{i} + 0.161 \hat{j} + 0.215 \hat{k} \text{ (x c)}$$

$$\text{(Note that } v_\Lambda^2 \cong 0.64 < 1 \text{ ok)}$$