

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TIF390 Matematisk fysik och speciell relativitetsteori

Augusti 22 2024

Examinator: Gabriele Ferretti rum: Origo 6111
tel. 0721582259 email: `ferretti@chalmers.se`

OBS: Nästa granskningstillfälle: 2024-09-13, kl 17:00 i Origo 6115

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare med tomt minne.

Betygsgränser:

Betygsgränser (tentamen+bonuspoäng):

24 poäng: 3

36 poäng: 4

48 poäng: 5

1 (8 poäng)

Låt $A = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z + t\mathbf{1}$, där x, y, z, t är reella tal,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

är Pauli matriser, och $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ identitetsmatrisen.

Beräkna: $\text{tr}(A \oplus A)$, $\text{tr}(A \otimes A)$, $\det(A \oplus A)$, och $\det(A \otimes A)$.

2 (9 poäng)

Visa att permutationsgrupperna S_3 , S_4 , och S_5 har respektive 3, 5, 7 irreducibla representationer genom att rita alla Young Tableaux. Man skulle kunna gissa att mönster fortsätter: 3, 5, 7, 9, 11... Men det är inte sant! Visa att S_6 har mer än 9 irreducibla representationer.

3 (8 poäng)

För vilka värden på λ har den homogena Fredholmekvationen

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} (x + \sin y) \phi(y) dy$$

en icke-trivial (dvs. $\phi \neq 0$) lösning? (Det blir ett krångligt uttryck i π som kan evalueras numeriskt, om man vill.)

4 (8 poäng)

Beräkna den reella funktionen $f(x)$ som minimerar funktionalen

$$S[f] = \int_0^1 f^4(x)(f'(x))^2 dx$$

med randvillkoren $f(0) = 2$, $f(1) = 3$.

5 (9 poäng)

Beräkna den maximala kinetiska energin en positron e^+ kan ha när den skapas från att en D^+ -meson sönderfaller i vila till tre partiklar: $D^+ \rightarrow e^+ + \bar{K}^0 + \nu$. Du kan betrakta både neutrino ν och positron e^+ som masslösa.

$$m_{D^+} = 1870 \text{ MeV}, m_{\bar{K}^0} = 498 \text{ MeV}.$$

6 (8 poäng)

För

$$F_{\mu\nu} := \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

(där $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ som vanligt), visa att Maxwellekvationen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ följer från

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

för ett visst val av index.

Ekvationen ovan kan skrivas på ett ekvivalent sätt som

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0,$$

där $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ är den fullständigt antisymmetriska tensorn där $\varepsilon^{0123} = 1$. För vilket värde av α får du tillbaka $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$?

PROBLEM 1.

$$A = \begin{pmatrix} z+t & x-iy \\ x+iy & -z+t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr} A = 2t, \quad \det A = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

$$\operatorname{tr}(A \oplus A) = 2 \operatorname{tr} A = 4t$$

$$\operatorname{tr}(A \otimes A) = (\operatorname{tr} A)^2 = 4t^2$$

$$\det(A \oplus A) = (\det A)^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2$$

$$\det(A \otimes A) = (\det A)^4 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^4.$$

PROBLEM 2

irreps = # conjugacy classes = # Y.T.

S_3 :  ,  ,  3

S_4 :  ,  ,  ,
  ,  } 5

S_5 :  ,  ,  ,  ,
  ,  ,  } 7

S_6 : has 11 Y.T. ...

PROBLEM 3

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} (x + \sin y) \varphi(y) dy.$$

$$\varphi(x) = \lambda x \int_0^{\pi/2} \varphi(y) dy + \lambda \int_0^{\pi/2} \sin y \varphi(y) dy \Rightarrow$$

$$[1] \underbrace{\int_0^{\pi/2} \varphi(x) dx}_{C_1} = \lambda \underbrace{\int_0^{\pi/2} x dx}_{\frac{\pi^2}{8}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \varphi(y) dy}_{C_1} + \lambda \underbrace{\int_0^{\pi/2} dx}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin y \varphi(y) dy}_{C_2},$$

$$[2] \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin x \varphi(x) dx}_{C_2} = \lambda \underbrace{\int_0^{\pi/2} x \sin x dx}_1 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \varphi(y) dy}_{C_1} + \lambda \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin x dx}_1 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin y \varphi(y) dy}_{C_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \lambda \cdot \frac{\pi^2}{8} C_1 + \lambda \cdot \frac{\pi}{2} C_2 \\ C_2 = \lambda C_1 + \lambda C_2 \end{cases}$$

Non zero solutions for $\begin{vmatrix} \frac{\pi^2}{8}\lambda - 1 & +\frac{\pi}{2}\lambda \\ \lambda & -1+\lambda \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}\right)\lambda^2 - \left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right)\lambda + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \neq \frac{1 + \frac{\pi^2}{8} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{8}\right)^2 - 4\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}\right)}}{4\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}\right)} \approx \begin{matrix} -7.067 \\ 0.421 \end{matrix}$$

PROBLEM 4

$$S = \int \underbrace{\frac{1}{2} f^4 f'^2}_{=L} dx$$

Note that $H = \pi f' - L$ (where $\pi = \frac{\partial L}{\partial f'} = f^4 f'$) is conserved:

$$H = f^4 f'^2 - \frac{1}{2} f^4 f'^2 = \frac{1}{2} f^4 f'^2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow f^2 f' = \text{const.} \Rightarrow f^2 df = c dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} f^3 = cx + d$$

equivalently: $f(x) = (ax + b)^{\frac{1}{3}}$.

$$f(0) = 2 \Rightarrow b = 8, f(1) = 3 \Rightarrow a = 19$$

$$\Rightarrow f(x) = (19x + 8)^{\frac{1}{3}}.$$

PROBLEM 5

$$D^+ \rightarrow \underbrace{\bar{K}^0 + \nu}_{\text{combine}} + e^+$$

$m \sim m_{\bar{K}^0}$

$$P_{e^+}^{(\text{max})} \approx \frac{m_{D^+}^2 - m_{\bar{K}^0}^2}{2m_{D^+}} \approx 869 \text{ MeV}.$$

$$E_{e^+}^{(\text{max})} \approx P_{e^+}^{(\text{max})}$$

$(m_{e^+} \approx 0).$

PROBLEM 6

Set $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$:

$$\begin{aligned} & \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} (-B_x) + \frac{\partial}{\partial y} (-B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (-B_z) = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned}$$

in $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma\delta}$ the index α is free

setting $\alpha=0$ forces β, γ, δ to take values 1, 2, 3 and permutations.

Since F_{rs} is antisymmetric one gets back $\propto \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}$.