

Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375

Fredagen 22 augusti 2025, 8.30-12.30

Examinator: Martin Cederwall,

Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

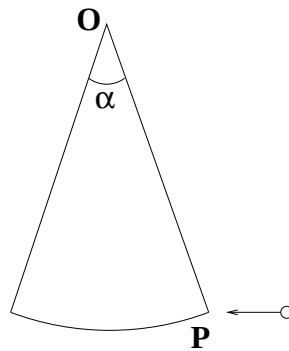
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade och text och figurer tydliga och läsbara. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

1. En cirkelsektor med radien a och vinkeln α har massan M , homogent fördelad över ytan. Den kan rotera fritt kring spetsen O , som är fixerad, och hänger i vila i sitt stabila jämviktsläge. Dess ena nedre hörn P träffas av en punktmassa m med horisontell hastighet v , som fastnar på hörnet. Vad är kroppens vinkelhastighet omedelbart efter stöten?
Tröghetsmoment från formelsamling får inte användas.



2. En horisontell cirkelskiva roterar med konstant vinkelhastighet ω runt origo. På cirkelskivan finns en rak skåra som går genom origo, i vilken en liten kula kan glida utan friktion. Kulan startar från origo vid tiden $t = 0$ med en hastighet v_0 längs skåran. Bestäm kulans läge och den horisontella normalkraften från skåran på kulan som funktion av t i den efterföljande rörelsen.
3. En partikel kan glida utan friktion på konen $z = \cot \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$, där z -axeln är vertikal (konens öppningsvinkel är alltså 2α). Lämpliga generaliserade koordinater kan vara polära koordinater r och φ i xy -planet. Använd Lagranges formalism för att härleda rörelseekvationerna för partikeln. Finn en konserverad storhet, och använd den för att reducera till en enda differentialekvation för r . Bestäm vinkelfrekvensen för små "svängningar" runt ett "jämviktsläge" $r = r_0$, dvs. små avvikelser från en cirkulär bana.
4. En stel kropp består av två homogena cirkelskivor, vardera med radien a och massan m , hopfogade längs en diameter och vinkelräta mot varandra. Låt denna kropp vara i vila med masscentrum i origo i ett koordinatsystem där z -axeln är riktad längs den gemensamma diametern, och de två skivorna är belägna i xz - resp. yz -planet. Under en mycket kort tid påverkas kroppen av en impuls $\vec{p} = p\hat{x}$ i punkten $\vec{r} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\hat{y} + \hat{z})$. Bestäm hastigheten för kroppens masscentrum och kroppens rotationsvektor omedelbart efter stöten.

5. En stavhoppare bär en (horisontell) stav med vilolängd L . Hen springer med en hastighet (som inte är mycket liten jämfört med ljushastigheten) mot en bergvägg. Hur långt från bergväggen är stavhopparen (mätt i bergväggens vilosystem) då hen *ser* att stavens ände slår i väggen (dvs. nås av en ljussignal som sänds ut vid denna händelse)?

Lösningssförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375

Fredagen 22 augusti 2025

Examinator: Martin Cederwall

Lösningssförslagen innehåller inte alltid den dimensions- och rimlighetsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Tröghetsmomentet (m.a.p. den fixa punkten) för cirkelsektorn räknas ut till $\frac{1}{2}Ma^2$. För den sammansatta kroppen efter stöten är $I = (\frac{1}{2}M + m)a^2$. Rörelsemängdsmomentet före stöten är $L = mva \cos \frac{\alpha}{2}$. Det bevaras i stöten. Efteråt är $L = I\omega$, dvs.

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{v \cos \frac{\alpha}{2}}{a(1 + \frac{M}{2m})}.$$

2. De fiktiva krafterna, i ett system som snurrar med skivan, är centrifugalkraften $m\omega^2\hat{r}$ och Corioliskraften $-2m\omega\dot{r}\hat{\theta}$. Kulans rörelseekvation är $m\ddot{r} = mr\omega^2$, med allmän lösning $r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Begynnelsevillkoren ger $A + B = 0$, $(A - B)\omega = v_0$, dvs. $A = \frac{v_0}{2\omega}$, $B = -\frac{v_0}{2\omega}$, så $r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t$. Normalkraften $\vec{N}$ måste balansera Corioliskraften och blir $\vec{N} = 2m\omega v_0 \cosh \omega t \hat{\theta}$

3. Eftersom $z = r \cot \alpha$ blir den kinetiska energin $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m((1 + \cot^2 \alpha)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$. Den potentiella energin är $V = mgz = mgr \cot \alpha$. Lagrangianen är

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2 \alpha} + r^2\dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha.$$

Lagranges ekvationer:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\ddot{r}}{\sin^2 \alpha} - r\dot{\varphi}^2 + g \cot \alpha, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Det finns alltså en rörelsekonstant $\ell = r^2\dot{\varphi}$ (multipliserat med m är det rörelsemängdsmomentet runt z -axeln). Sätt in i den radiella ekvationen:

$$0 = \frac{\ddot{r}}{\sin^2 \alpha} - \frac{\ell^2}{r^3} + g \cot \alpha.$$

“Jämviktsläge” (dvs. cirkulär rörelse) vid $r = r_0$, $r_0 = (\frac{\ell^2 \tan \alpha}{g})^{\frac{1}{3}}$. Låt $f(r) = -\frac{\ell^2}{r^3} + g \cot \alpha$. Linearisering kring $r = r_0$ ger $\ddot{r} + \sin^2 \alpha f'(r_0)(r - r_0)$. Vi kan läsa ut vinkelfrekvensen för oscillationerna som

$$\omega^2 = \sin^2 \alpha f'(r_0) = 3 \left(\frac{g^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\ell} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

(Möjligen kan det vara intressant att jämföra ω med $\dot{\varphi}$...)

4. Tröghetsmatrisen för kroppen m.a.p. dess masscentrum är $\bar{I} = ma^2 \text{diag}(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$. Impulsmomentet är $\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{ap}{\sqrt{2}}(\hat{y} - \hat{z})$. Rotationsvektorn omedelbart efter stöten blir $\vec{\omega} = \bar{I}^{-1}\vec{\mu} = \frac{\sqrt{2}p}{ma}(\frac{2}{3}\hat{y} - \hat{z})$. Masscentrums hastighet blir $\frac{p}{2m}\hat{x}$.

5. Det lönar sig att rita ett rumtidsdiagram. I bergväggs vilosystem har staven längden $\frac{L}{\gamma(v)}$. Låstavens främre ända slår i väggen vid tiden 0. Stavens bakre ända rör sig enligt $x = -\frac{L}{\gamma(v)} + vt$. Ljussignalen som sänds ut rör sig enligt $x = -t$. Dessa två linjer skär varandra för $t = \frac{L}{(1+v)\gamma(v)} = L\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$. Detta är också det sökta avståndet från bergväggen. (Notera att det är mindre än L .)