

Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375

Måndagen 2 juni 2025, 14.00-18.00

Examinator: Martin Cederwall,

Jour: Oliver Thim, tel. 0702-426893, besöker tentamenssalarna c:a 15.00 och 17.00.

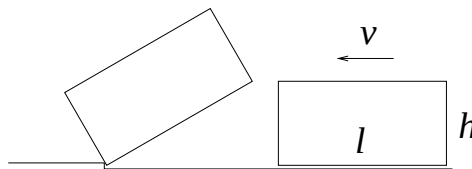
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng.

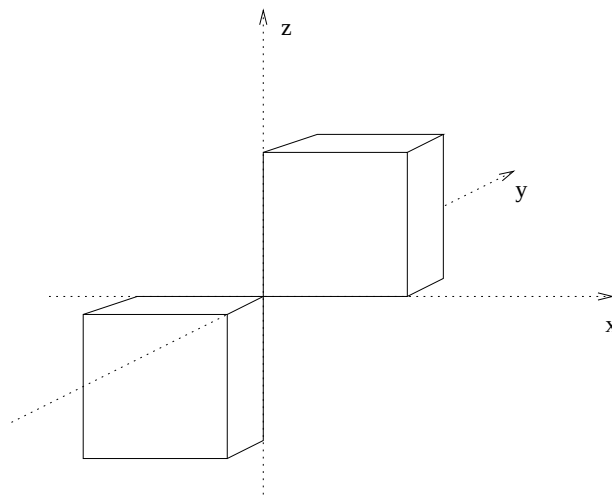
Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade och text och figurer tydliga och läsbara. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Lycka till!

1. Ett homogent rätblock (se figuren) glider med farten v på ett horisontellt underlag, då det stöter på en kant (med försumbar höjd), så att det främre nedre hörnet stannar. Det kan antagas stanna där under den fortsatta rörelsen. Hur stor skall v minst vara för att rätblocket skall kunna tippa över (dvs. för att dess masscentrum skall passera förbi hacket)? Kontrollera rimlighet, särskilt då rätblocket är mycket lågt eller mycket högt.



2. Två likadana homogena kuber, vardera med sidan a och massan m , är fast sammanfogade enligt figuren. Båda kuberna har alltså kanterna parallella med koordinataxlarna i det inritade systemet, och de berör varandra i ett hörn. Bestäm huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment för den resulterande stela kroppen.



3. En massa släpps från vila från höjden h över marken, vid ekvatorn. Hur långt från lodlinjen landar den? Med kännedom om att Corioliskraften är proportionell mot Ω , jordens rotationshastighet, använd först ett dimensionsargument för att bestämma svarets form, sånär som på något dimensionslöst tal. Beräkna sedan detta tal. (h är mycket mindre än jordradien.)
Ledning: 1) Strunta i centrifugalkraft, den kan tänkas som en del av den effektiva tyngdkraften som definierar lodlinjen. 2) Den horisontella hastigheten är mycket mindre än den vertikala. Corioliskraften kan då beräknas från enbart den vertikala hastigheten.

4. En partikel rör sig i xy -planet under inverkan av potentialen

$$V(x, y) = V_0 \cosh \frac{\sqrt{x^2 + 2\gamma xy + y^2}}{a},$$

där V_0 , γ och a är konstanter. Använd Lagranges formalism för att finna de lineariserade rörelseekvationerna nära det stabila jämviktsläget. Finn deras allmänna lösning $x(t)$, $y(t)$.

5. En foton med energi E krockar med en elektron (massa m) i vila i en rak stöt. Efter stöten har elektronen fått en hastighet, och en foton med energi $E' < E$ färdas åt motsatt håll. Visa att om den ursprungliga fotonen har mycket hög energi ($E \gg m$) så har fotonen efter stöten energin $E' \approx \frac{m}{2}$.

Lösningssförslagen innehåller inte alltid den dimensions- och rimlighetsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modelllösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Rörelsemängdsmomentet m.a.p. hörnet är bevarat under stöten. Innan är det $\frac{1}{2}mvh$. Tröghetsmomentet m.a.p. hörnet är $I = \frac{1}{3}m(h^2 + \ell^2)$, så rotationshastigheten efter stöten blir $\omega = \frac{3vh}{2(h^2 + \ell^2)}$, och rotationsenergin $T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{8}mv^2 \frac{h^2}{h^2 + \ell^2}$. Den skall räcka för att nå höjden $\frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \ell^2} - \frac{h}{2}$: $\frac{3}{8}mv^2 \frac{h^2}{h^2 + \ell^2} \geq \frac{1}{2}mg(\sqrt{h^2 + \ell^2} - h)$, dvs. $v^2 \geq \frac{4}{3}g \frac{(h^2 + \ell^2)(\sqrt{h^2 + \ell^2} - h)}{h^2} = \frac{4}{3}gh(1 + \frac{\ell^2}{h^2})(\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{h^2}} - 1)$.
2. Varje kub har tröghetsmatris m.a.p. sitt masscentrum $\bar{I} = \frac{1}{6}ma^2 \text{diag}(1, 1, 1)$. Den är effektivt en sfär. Då kan man direkt gå över till koordinater $\xi\eta\zeta$, där ζ -axeln går genom de båda masscentra. Vardera kuben har $\bar{I} = \frac{1}{6}ma^2 \text{diag}(1, 1, 1)$ även i detta system. Sedan flyttas momentpunkten till origo, dvs. en sträcka $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ i ζ -led. För en kub ger Steiner tröghetsmatrisen $\frac{1}{6}ma^2 \text{diag}(1, 1, 1) + \frac{3}{4}ma^2 \text{diag}(1, 1, 0) = ma^2 \text{diag}(\frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{1}{6})$. Totalt: $I_0 = ma^2 \text{diag}(\frac{11}{6}, \frac{11}{6}, \frac{1}{3})$.

Det går förstås också bra att göra Steiner i xyz -systemet, med resultatet

$$I_0 = ma^2 \begin{pmatrix} 4/3 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 4/3 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 4/3 \end{pmatrix},$$

som sedan diagonaliseras.

3. Ingående parametrar är g, h, Ω . Kalla den sökta avvikelsen d . Om $d = k\Omega g^a h^b$, där k är en dimensionslös konstant, så ger dimensionsanalys att $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

En vertikal hastighet v vid ekvatorn ger en Corioliskraft $2m\Omega v$ österut. Kalla den vertikala koordinaten nedåt z och den horisontella österut x , med origo i punkten massan släpps från. Den vertikala rörelsen ges av $z = \frac{1}{2}gt^2$, $\dot{z} = gt$. Ekvationen i x -led blir $m\ddot{x} = 2m\Omega\dot{z}$, $\ddot{x} = 2\Omega g t$, med lösningen ($x(0) = 0 = \dot{x}(0)$) $x = \frac{1}{3}\Omega g t^3$. Massan landar vid $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, så $d = \frac{1}{3}\Omega g (\frac{2h}{g})^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\Omega \sqrt{\frac{h^3}{g}}$.

4. Stabilt jämviktsläge i origo. Utveckla potentialen till kvadratisk ordning:

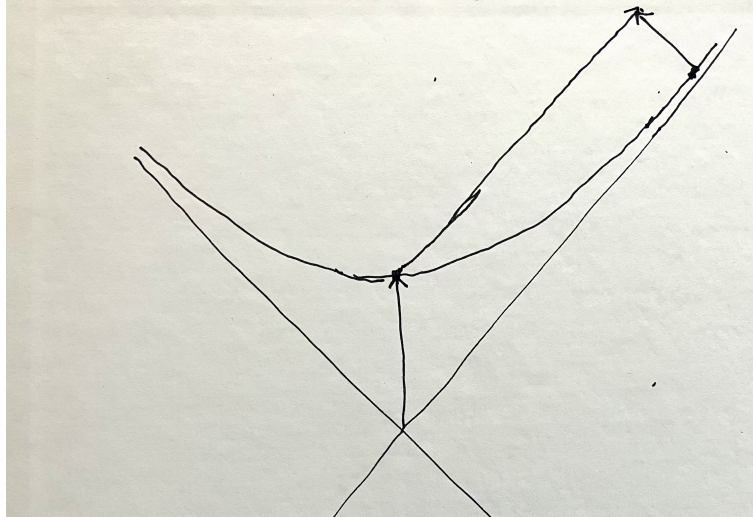
$$V \approx V_0 + \frac{V_0}{2a^2}(x, y)^\top \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = V_0 + \frac{1}{2}X^\top K X.$$

Strunta i den konstanta termen. $L = \frac{1}{2}m\dot{X}^\top \dot{X} - \frac{1}{2}X^\top K X$. Lagranges ekvationer: $m\ddot{X} + KX = 0$. Ansats $X = Ae^{i\omega t}$ ger $KA = m\omega^2 A$. Eigenvektorer till K är $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1)^\top$ med egenvärden $\frac{V_0}{a^2}(1 \pm \gamma)$. Motsvarande vinkelfrekvenser ges alltså av $\omega_\pm^2 = \frac{V_0}{ma^2}(1 \pm \gamma)$. Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \beta) + \frac{c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \gamma),$$

där b, c, β, γ är konstanter som bestäms av begynnelsevillkor.

5. Enklaste lösningen är att rita. Den vertikala pilen är elektronens rörelsemängd före stöten, och den långa diagonala pilen är rörelsemängden för en foton med mycket hög energi. Summan (totala rörelsemängden) skall vara summan av en vektor på samma hyperbel (elektronens r.m. efter stöten) och en diagonal vektor åt vänster. Utan att räkna ser vi att i gränsen då energin är stor (dvs. $E \gg m$) blir den nya fotonens energi hälften av elektronens ursprungliga (och att alltid $E' < \frac{m}{2}$).



Alternativt kan man räkna. Kalla elektronens r.m. efter stöten P' . Då gäller $(m, 0) + (E, E) = P' + (E', -E')$. Vi är bara intresserade av E' , och kan eliminera P' m.h.a. $P'^2 = -m^2$, dvs. $-m^2 = -(m + E - E')^2 + (E + E')^2$, vilket ger

$$E' = \frac{mE}{m + 2E} = \frac{m}{2} \frac{1}{1 + \frac{m}{2E}},$$

som $\rightarrow \frac{m}{2}$ då $\frac{m}{E} \rightarrow 0$.