Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Fredagen 11 oktober 2024, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall,
Jour: Oliver Thim, tel. 0702-426893, besöker tentamenssalarna c:a 15.00 och 17.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

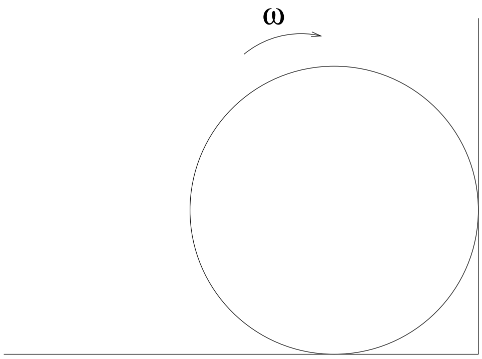
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

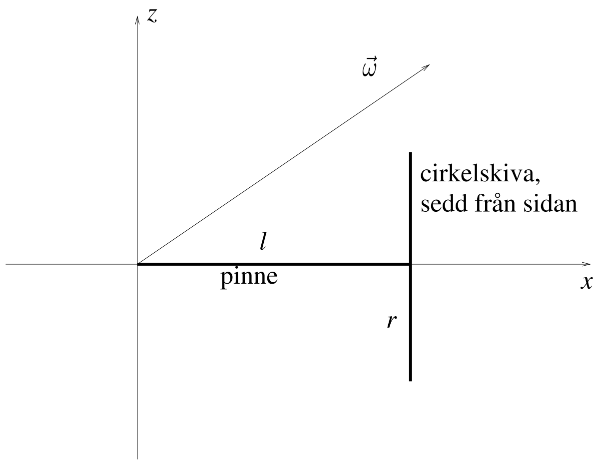
1. Ett homogent klot med radie a ligger och snurrar i ett hörn, se figuren. Tyngdkraften verkar nedåt. Friktionskoefficienten mellan klotet och båda ytorna är μ. Om klotet vid en viss tidpunkt har vinkelhastigheten ω_0, hur lång tid tar det sedan tills dess rotation upphör?



2. En vågrörelse, t.ex. ljud, kan i ett system S beskrivas med en funktion (som kan vara t.ex. tryckvariationen som funktion av läge och tid) $\phi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} = Ae^{-ik(x-ct)}$, där $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ är våglängden och c vågens hastighet. Använd Galileitransformationen för att få fram vågens hastighet, vinkelfrekvens och våglängd i ett system S' som rör sig relativt S med hastigheten $v\hat{x}$.

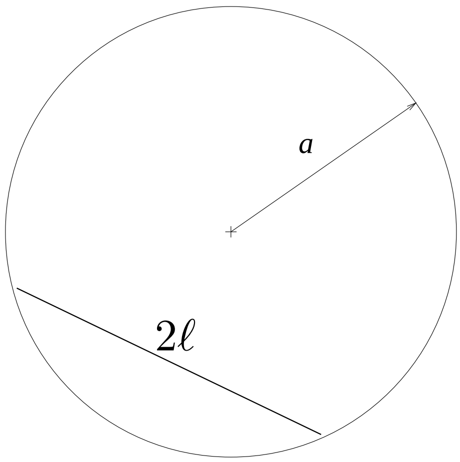
3. En leksakssnurra består av en homogen cirkulär skiva med massan m och radien r fäst på en lätt pinne (försumbar massa) med längden ℓ. Vad är dess tröghetsmatris med avseende på pinnens ändpunkt (origo i figuren)? Färdiga uttryck från formelsamling får inte användas.

   Vid en viss tidpunkt befinner sig snurran i horisontellt läge (se figuren) och roterar kring origo med rotationsvektorn $\vec{\omega} = \nu\hat{x} + \Omega\hat{z}$. Vad är det momentana rörelsemängdsmomentet m.a.p. origo? Rotationen kring symmetriaxeln flyttar inte snurran, men rotationen runt z-axeln gör det, så att momentant $\frac{d}{dt}\vec{L} = \Omega\hat{z} \times \vec{L}$. Vad är villkoret på ν och Ω för att denna förändring i rörelsemängdsmomentet skall kunna åstadkommas av tyngdkraften?



4. Två masslösa partiklar ("fotoner"), den ena med energin E_1 på väg åt höger, den andra med energin E_2 på väg åt vänster, kolliderar. Efter kollisionen finns bara en partikel. Vad är dess massa?

5. En smal rak homogen stav har längden 2ℓ. Dess ändar glider friktionsfritt (under inverkan av gravitationen) på en vertikalt ställd cirkel med radien a. Cirkeln är fixerad, och $\ell < a$. Ställ upp Lagrangianen och finn stavens rörelseekvationer för lämpligt koordinatval. Vad blir vinkelfrekvensen för små svängningar kring det stabila jämviktsläget? Skissera deras beroende av den dimensionslösa parametern $\xi = \ell/a$, dels för fixt a, dels för fixt ℓ. Finns det extrempunkter?



Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Fredagen 11 oktober 2024
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Kalla normalkrafterna från golv resp. vägg N_1 och N_2. Kraftjämvikt ger

$$
\begin{aligned}
0 &= N_1 + \mu N_2 - mg \;, \\
0 &= \mu N_1 - N_2 \;,
\end{aligned}
$$

dvs. $N_1 = \frac{mg}{1+\mu^2}$, $N_2 = \frac{\mu mg}{1+\mu^2}$. Klotets tröghetsmoment m.a.p. masscentrum är $I_0 = \frac{2}{5}ma^2$. Rotationen förändras enligt $I_0\dot{\omega} = -\mu(N_1+N_2)a = -\frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}mga$, med lösningen $\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\frac{mga}{I_0}t$, så rotationen har upphört efter tiden

$$t = \frac{1+\mu^2}{\mu(1+\mu)}\frac{I_0\omega_0}{mga} = \frac{2}{5}\frac{1+\mu^2}{\mu(1+\mu)}\frac{a\omega_0}{g} \;.$$

2. Galileitransformationen säger $x' = x - vt$, $t' = t$. Insättning ger $\phi = Ae^{i(\omega t' - k(x'+vt'))}$. Vi läser av: $k' = k$, $c' = c - v$, $\omega' = \omega(1 - \frac{v}{c})$.

3. Tröghetsmatrisen m.a.p. origo fås med Steiner:

$$I_0 = mr^2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + m\ell^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Rörelsemängdsmomentet m.a.p. origo är

$$\vec{L}_0 = I_0\begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mr^2\nu \\ 0 \\ (\frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2)\Omega \end{pmatrix} \;.$$

Dess tidsderivata blir $\dot{\vec{L}}_0 = \Omega\hat{z}\times\vec{L}_0 = \frac{1}{2}mr^2\nu\Omega\hat{y}$. Detta skall vara lika med det vridande momentet som utövas av tyngkraften, $mg\ell\hat{y}$. Alltså, $\nu\Omega = \frac{2g\ell}{r^2}$.

4. Låt $c = 1$. De två partiklarna har före reaktionen rörelsemängderna $P_1 = (E_1, E_1)$, $P_2 = (E_2, -E_2)$. Partikeln som bildas har $P = P_1 + P_2$. Dess massa är $m^2 = -P^2 = -2P_1\cdot P_2 = -4E_1E_2$. $m = 2\sqrt{E_1E_2}$.

5. Stavens mittpunkt är på avståndet $\sqrt{a^2-\ell^2}$ från cirkelns mittpunkt. Man kan betrakta rörelsen som rotation kring mittpunkten. Tröghetsmomentet är då $I = \frac{1}{12}m(2\ell)^2 + m(a^2-\ell^2) = m(a^2 - \frac{2}{3}\ell^2)$. En lämplig koordinat kan vara vinkeln φ mellan vertikalen och linjen mellan cirkelns mittpunkt och stavens mittpunkt. Då är $T = \frac{1}{2}m(a^2-\frac{2}{3}\ell^2)\dot{\varphi}^2$, $V = -mg\sqrt{a^2-\ell^2}\cos\varphi$. Lagranges ekv. ger

$$\ddot{\varphi} + \frac{g\sqrt{a^2-\ell^2}}{a^2-\frac{2}{3}\ell^2}\sin\varphi = 0 \;.$$

För små svängningar kring $\varphi = 0$ är

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{a^2 - \ell^2}}{a^2 - \frac{2}{3}\ell^2} = \frac{g}{a}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1 - \frac{2}{3}\xi^2} = \frac{g}{\ell}\frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1 - \frac{2}{3}\xi^2} \ .$$

Funktionen $f(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1-\frac{2}{3}\xi^2}$ växer från värdet 1 vid $\xi = 0$ till ett maximum då $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och avtar sedan mot 0 då $\xi \to 1$.
Funktionen $g(\xi) = \frac{\xi\sqrt{1-\xi^2}}{1-\frac{2}{3}\xi^2}$ växer från värdet 0 vid $\xi = 0$ till ett maximum då $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, och avtar sedan mot 0 då $\xi \to 1$.