Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Onsdagen 28 augusti 2024, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall, besöker tentamenssalarna c:a 15.00 och 17.00.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

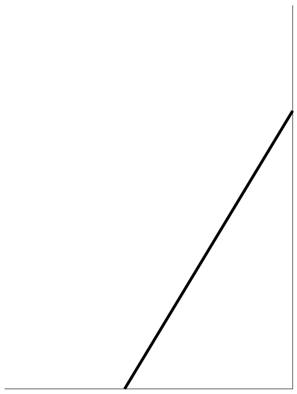
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

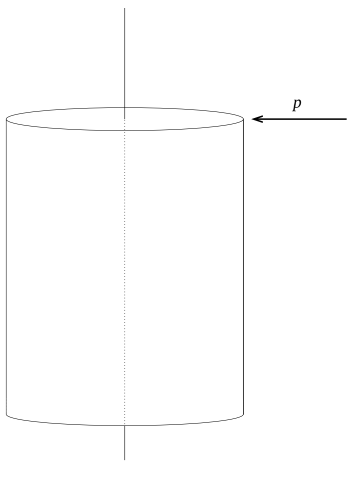
---

1. En stav kan glida friktionsfritt mot en vägg och ett golv. Staven är homogen, dess längd är a och dess massa m, Om staven släpps med en vinkel 0 mot väggen (men litet större, så den lämnar sitt labila jämviktsläge), bestäm dess vinkelhasthet $\dot{\phi}$ som funktion av vinkeln ϕ mellan staven och väggen. Staven rör sig endast i figurens plan.



2. En partikel rör sig med konstant fart ωr på en cirkel med radie r. Välj koordinater så att partikelns momentana hastighet vid tiden 0 är $\omega r\hat{x}$. Vad är vinkeln mellan x-axeln och partikelns hastighetsvektor som funktion av tiden i ett (Galileiskt) inertialsystem som rör sig med hastigheten $\omega r\hat{x}$ relativt det där cirkelns centrum är i vila?

3. En homogen cirkulär cylinder med massa m, radie r och längd $\sqrt{3}\,r$ roterar med vinkelhastigheten Ω runt sin symmetriaxel, och dess masscentrum är i vila. Den påverkas under en försumbar tid av en impuls p enligt figuren. Bestäm hastigheten för cylinderns masscentrum och dess rotationsvektor (båda till storlek och riktning) efter stöten.



4. En partikel med massan m befinner sig i vila, och sönderfaller till två partiklar med massorna $m/2$ och $m/4$. Vad blir farterna för de två partiklarna?

5. En partikel med massa m kan röra sig i 3 dimensioner. Den påverkas av tyngdkraften i negativ z-led, och dessutom av två "fjäderkrafter", från "fjädrar" med fjäderkonstant k och naturlig längd 0 fästa i partikeln och i punkterna $(x, y, z) = (\pm a, 0, 0)$. Bestäm den allmänna lösningen till systemets rörelseekvationer. Vilken form har partikelns banor?

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Lördagen 1 juni 2023
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

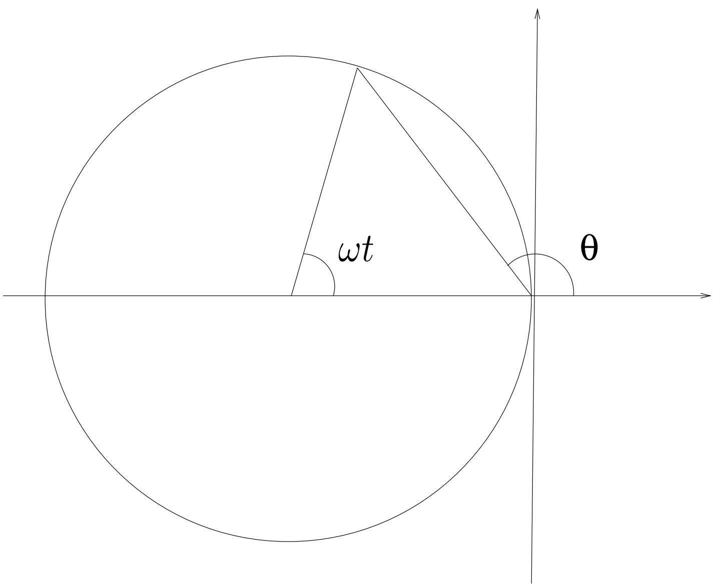
1. Man kan välja två sätt: masscentrums translation och rotation runt masscentrum, eller rotation kring ett momentant rotationscentrum. Med det senare valet: Låt (x, y) vara horisontell och vertikal koordinat, rknat från "hörnet". Det momentana rotationscentrum ligger i $P = a(\cos\phi, \sin\phi)$. Dess avstånd från stavens masscentrum är $\frac{a}{2}$, så Steiners sats ger $I_P = \frac{1}{12}ma^2 + m(\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{3}ma^2$. Bevarande av energi: $\frac{1}{6}ma^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\phi)mga$, vilket ger

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3g}{a}(1 - \cos\phi)}\ .$$

Detta gäller så länge staven är i kontakt med väggen. (Så småningom kommer det inte vara sant; det skulle krävas en negativ kontaktkraft, men en behandling av det krävs inte för full poäng.)

2. I cirkelns inertialsystem är partikelns hastighet $\vec{u} = \omega r(\cos\omega t, \sin\omega t)$. I det efterfrågade inertialsystemet: $\vec{u}' = \omega r(\cos\omega t - 1, \sin\omega t)$. $\vec{u}'$ ligger på en cirkel med radie ωr och centrum i $(-\omega r, 0)$. Se figuren. Den eftersökta vinkeln är

$$\theta = \frac{\pi + \omega t}{2}\ .$$



3. Låt z-axeln vara rotationsaxeln, och låt impulsen vara $-p\hat{x}$. Koordinataxlarna är huvudtröghetsaxlar. För en cylinder med radie r och längd ℓ: $I_z = \frac{1}{2}mr^2$, $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$. Nu är $\ell = \sqrt{3}r$, så alla tre huvudtröghetsmomenten är $\frac{1}{2}mr^2$. Masscentrums hastighet efter stöten är $-\frac{p}{m}\hat{x}$. Impulsen ger ett impulsmoment m.a.p. masscentrum $-\frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{y}$. Rörelsemängdsmomentet efter stöten blir $\frac{1}{2}mr^2\Omega\hat{z} - \frac{\sqrt{3}}{2}rp\hat{y}$, och rotationsvektorn $\vec{\Omega}' = \Omega\hat{z} - \frac{\sqrt{3}p}{mr}\hat{y}$.

4. Låt farterna vara u och v (motriktade). Bevarande av relativistisk rörelsemängd (energi och rörelsemängd) ger $(c = 1)$

$$m = \gamma(u)\frac{m}{2} + \gamma(v)\frac{m}{4} \ ,$$
$$0 = u\gamma(u)\frac{m}{2} - v\gamma(v)\frac{m}{4} \ .$$

För att lösa använder man lämpligen the "hyperboliska 1:an" $(\gamma(u))^2 - (u\gamma(u))^2 = 1$. Resultatet är $u = \frac{\sqrt{105}}{19}$, $v = \frac{\sqrt{105}}{13}$.

5. Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Potentiell energi: $V = mgz + \frac{1}{2}k((x-a)^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}k((x+a)^2 + y^2 + z^2) = mgz + k(x^2 + y^2 + z^2) + ka^2$. Stabilt jämviktsläge i $(0, 0, -\frac{mg}{2k})$. Flytta origo dit. Då är rörelseekvationerna $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \frac{2k}{m}\vec{r} = 0$, med allmän lösning

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \alpha_i) \ ,$$

with $\omega^2 = \frac{2k}{m}$. Banorna är ellipser.