Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Lördagen 1 juni 2024, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Eric Nilsson, tel. 0761-413451, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

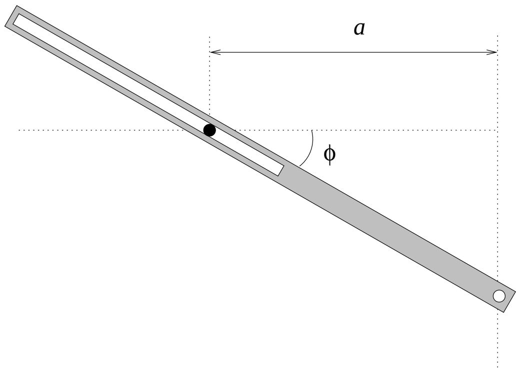
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För betyg 3, 4 och 5 krävs 20, 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

1. En stel kropp har formen av en smal homogen stav med massan m och längden $2a$. Dess ena ände (till höger i figuren) kan glida friktionsfritt längs en vertikal linje. På det horisontella avståndet a från denna linje finns ett fixerat stift, som kan glida i en skåra i staven (med resultatet att någon punkt på staven befinner sig där stiftet är). Gravitationen verkar nedåt i figuren. Visa att potentialen har en terrasspunkt i $\phi = 0$. Om staven ges en liten störning från $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$ (den ges alltså begynnelsevillkor som gör att ϕ och $\dot{\phi}$ är försumbara, men att staven ändå avviker från jämviktsläget), bestäm $\dot{\phi}$ som funktion av ϕ till lägsta (nollskilda) ordning i ϕ för $\phi \ll 1$.



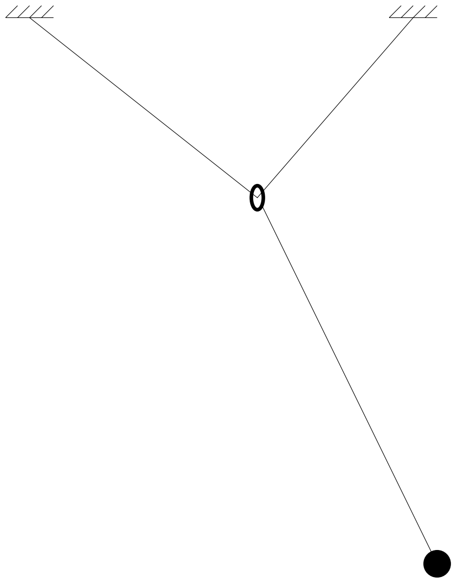
2. En karusell har radien R och roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω. En person, **A**, sitter stilla vid karusellens kant och följer med i dess rörelse. En annan person, **B**, befinner sig vid tiden $t = 0$ på samma plats som **A**, och går därefter med konstant radiell fart u relativt karusellen tvärs över den. Ange hastigheten och accelerationen för **B** som funktion av tiden ($0 \leq t \leq \frac{2R}{u}$) i det inertialsystem där **A** momentant är i vila vid $t = 0$.

3. En mekanisk komponent i form av en rak homogen cylinder med massa m, radie r och längd d monteras på en axel som skall rotera. På grund av ett fabrikationsfel bildar cylinderns symmetriaxel en vinkel $\alpha \neq 0$ med axeln. Axeln går genom cylinderns masscentrum. Med vilket moment (storlek och riktning, rita figur!) påverkas cylindern om axeln roterar med vinkelhastigheten Ω?

4. En masslös partikel (foton) har en 4-dimensionell rörelsemängd $\epsilon(1, \vec{n})$, där ϵ är dess energi och $\vec{n}$ en enhetsvektor i rörelseriktningen. Den absorberas av en partikel i vila med massa m, vars energi därmed ökar. Vad blir massan för partikeln efter stöten?

v.g.v. $\longrightarrow$

5. En liten pärla med massan m kan glida friktionsfritt på ett (lätt, otänjbart) snöre. Snöret har längden $2\sqrt{2}a$, och dess ändar är fästa i två punkter på samma höjd, på avståndet $2a$ från varandra. I pärlan är i sin tur ett (lätt, otänjbart) snöre med längden $2a$ fäst, och i dess andra ände finns en massa m. Gravitationen verkar nedåt i figuren. Vi betraktar endast rörelse i figurens plan, och små svängningar kring det stabila jämviktsläget. Inför lämpliga koordinater, och konstruera den allmänna lösningen för systemets rörelse under dessa förutsättningar.
(Eventuell ledning: Pärlan rör sig på en ellips med halvaxlarna a och $\sqrt{2}a$.)



Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Lördagen 1 juni 2023
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Masscentrum ligger på höjden $\bar{y} = -a(\tan\phi - \sin\phi) = -\frac{1}{2}a\phi^3 + O(\phi^5)$, så potentialen $V = mg\bar{y}$ har en terrasspunkt i $\phi = 0$. När $\phi \ll 1$ är rörelsen rotation kring masscentrum, med kinetisk energi $T = \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2a)^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{6}ma^2\dot{\phi}^2$. (Detta kan kontrolleras explicit: med $\hat{x}$ riktad åt vänster är $\bar{x} = a\cos\phi$, så $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}) = a\dot{\phi}(-\sin\phi, -\frac{1}{\cos^2\phi} + \cos\phi)$, och bidraget till den kinetiska energin från masscentrums translationsrörelse är $\frac{1}{2}m(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\phi}^2(1 - \frac{2}{\cos\phi} + \frac{1}{\cos^4\phi}) = \frac{1}{2}(\phi^2 + O(\phi^4))ma^2\dot{\phi}^2$.) Energikonservering ger då $\frac{1}{6}ma^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}mga\phi^3 = 0$, så $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3g}{a}}\phi^{3/2}$.

2. Låt det roterande koordinatsystemet ha koordinater $\xi\eta\zeta$ med origo i karusellens mitt. **A** och **B** befinner sig vid $t = 0$ i $\xi = 0 = \zeta$, $\eta = -R$. Låt xyz vara koordinater i det inertialsystem där **A** momentant är i vila vid $t = 0$. Relationen mellan koordinatsystemen är

$$x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t - \omega Rt \ ,$$
$$y = \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t$$

(och $z = \zeta$). Rotationsvektorn är $\omega\hat{z}$. **B** rör sig enligt $\xi = 0 = \zeta$, $\eta = ut - R$, dvs. $(x, y) = (-(ut - R)\sin\omega t - \omega Rt, (ut - R)\cos\omega t)$. Antingen deriverar man detta två gånger, eller använder man uttryck för accelerationen.

$$\vec{v} = u\hat{\eta} - (ut - R)\omega\hat{\xi} - R\omega\hat{x} \ ,$$
$$\vec{a} = -2u\omega\hat{\xi} - (ut - R)\omega^2\hat{\eta} \ ,$$

där $\hat{\xi} = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t$, $\hat{\eta} = -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t$. (De två termerna i accelerationen är Coriolis- resp. centripetalaccelerationen.)

3. I ett kroppsfixt system $\xi\eta\zeta$ är tröghetsmatrisen $\mathrm{diag}(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2, \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2, \frac{1}{2}mr^2)$. Låt ζ-axeln biilda vinkeln α med z-axeln, som är rotationsaxeln, $\vec{\Omega} = \Omega(\hat{\zeta}\cos\alpha + \hat{\xi}\sin\alpha)$. Då blir rörelsemängdsmomentet $\vec{L} = \frac{1}{2}mr^2\Omega\cos\alpha\hat{\zeta} + (\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}md^2)\Omega\sin\alpha\hat{\xi}$, och

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \ldots = -\frac{1}{8}mr^2\Omega^2\sin 2\alpha(1 - \frac{d^2}{3r^2})\hat{\eta} \ .$$

4. Kalla rörelsemängderna före stöten P och P_γ för partikeln och fotonen, och den efter stöten P'. Kalla den resulterande massan M. Konservering av rörelsemängd ger $P' = P + P_\gamma = m(1, 0) + \epsilon(1, \vec{n})$. Man skall ha $P' = M\gamma(u)(1, \vec{u})$, där $\vec{u}$ är partikelns hastighet efter stöten. Eliminering av $\vec{u}$ ger svaret. Enklast är dock att beräkna $-M^2 = P' \cdot P' = (P + P_\gamma) \cdot (P + P_\gamma) = -m^2 - 2m\epsilon + 0$, så $M = \sqrt{m^2 + 2m\epsilon}$.

5. Det finns olika möjliga val av koordinat för pärlans läge. Om man väljer att parametrisera ellipsen med en vinkel ϕ har man t.ex. $(x, y) = a(\sqrt{2}\sin\phi, -\cos\phi)$. Med en vinkel ψ mellan det nedre snöret och vertikalen har den nedre massan läget $(x', y') = a(\sqrt{2}\sin\phi + 2\sin\psi, -\cos\phi - 2\cos\psi)$. Eftersom vi bara vill undersöka små svängningar sparar vi endast kvadratiska termer i den kinetiska energin, som då blir $T = \frac{1}{2}ma^2(4\dot{\phi}^2 + 4\sqrt{2}\dot{\phi}\dot{\psi} + 4\dot{\psi}^2)$. Potentialen approximeras på samma sätt som $V = \frac{1}{2}mga(2\phi^2 + 2\psi^2)$. Definiera $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. Lagranges ekvationer ger

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \ .$$

En ansats

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = Ae^{i\omega t}$$

ger

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 + \omega_0^2 & -\sqrt{2}\omega^2 \\ -\sqrt{2}\omega^2 & -2\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} A = 0 \ .$$

Koefficientmatrisen måste ha determinanten 0, vilket ger $\omega = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})\omega_0 \equiv \omega_\pm$. Amplitudvektorerna i de två fallen är proportionella mot $A_\pm = (1, \mp 1)^\intercal$. Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \delta_+) + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \delta_-) \ .$$