Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Fredagen 6 oktober 2023, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 15.00 och 17.00.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

1. En stel kropp är formad som ett rätblock med kanterna a, b och c. Dess densitet ϱ är konstant. En av kanterna med längden a är fixerad på en horisontell axel, som kroppen fritt kan rotera kring. Kroppen släpps från vila i ett läge där kanterna med längden b är horisontella. Hur stor blir den initiala vinkelaccelerationen α för kroppen, uttryckt i de givna storheterna (samt tyngdaccelerationen g)?

   För givet värde på b, hur skall c väljas för att α skall bli så stor som möjligt?

   För givet värde på c, hur skall b väljas för att α skall bli så stor som möjligt?

2. Ett föremål som kan röra sig på jordytan utsätts effektivt för en Corioliskraft. Om dess fart är tillräckligt låg (och andra horisontella krafter kan försummas), och rörelsen försiggår på breddgraden θ, bestäm radien r för den resulterande cirkelrörelsen relativt jorden.

   För att approximationen skall vara giltig får inte breddgraden ändras nämnvärt under rörelsen. Om detta villkor uttrycks som $r < \gamma R$, där R är jordradien och γ ett litet tal, vad blir villkoret på farten relativt jorden? Uppskatta numeriskt för t.ex. $\gamma = 0.1$ och $\theta \approx 30^\circ$.

3. En rymdstation har sin massa M koncentrerad nära en cirkel $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0\}$. För att simulera gravitation ombord roterar den runt z-axeln med en vinkelhastighet ω_0.

   Vid en viss tidpunkt träffas rymdstationen av en asteroid, vilket resulterar i en impuls $p\hat{z}$ verkande vid $(x, y, z) = (a, 0, 0)$. Vad blir rymdstationens rotationsvektor omedelbart därefter?

4. En kropp med massa m rör sig under inverkan av gravitationskraften från en mycket tyngre kropp, så dess potential är $V = \frac{k}{r}$. Betrakta endast rörelse i ett plan, och konstruera Langrangianen med generaliserade koordinater r och φ, polära koordinater i planet. Visa att Lagranges ekvationer ger att rörelsemängdsmomentet L är bevarat. Betrakta den resulterande "endimensionella" radiella rörelsen. Beräkna vinkelfrekvensen ω för små "vibrationer" kring ett jämviktsläge (dvs. små avvikelser från en cirkulär bana) uttryckt i m, k och L. (Kontrollera att resultatet har korrekt dimension!) Jämför ω med vinkelfrekvensen för själva cirkelrörelsen, dvs. $\dot{\varphi}$. Tolka resultatet.

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. I relativistiska kollisioner kan rörelseenergi omvandlas till massa. Antag att man i ett experiment i en partikelaccelerator studerar en process $x + x \to X + X$, där x och X betecknar elementarpartiklar med massorna m resp. M. Man har $M > m$, så partiklarna x måste ha kinetisk energi för att processen skall vara möjlig. Vilken är den minsta *relativa* hastigheten mellan de ingående partiklarna som möjliggör processen?

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Fredagen 6 oktober 2023
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Tröghetsmomentet m.a.p. masscentrum är $\bar{I} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$, och m.a.p. axeln $I = \bar{I} + m((\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2) = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2)$, där m är kroppens massa. Tyngdkraftens moment m.a.p. axeln är $M = \frac{1}{2}mgb$ (i utgångsläget). Den momentana vinkelaccelerationen blir då

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{I} = \frac{3gb}{2(b^2 + c^2)} = \begin{cases} \frac{3g}{2b}\frac{1}{1+x^2} \\ \frac{3g}{2c}\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

där $x = \frac{c}{b}$.

Om b är konstant skall x väljas så att $\frac{1}{1+x^2}$ är så stor som möjligt, dvs. c skall vara så liten som möjligt (nästan 0). Om c är konstant skall x väljas så att $\frac{x}{1+x^2}$ är så stor som möjligt, dvs. $x = 1$, $b = c$.

2. Corioliskraftens horisontalkomponent är $2mv\Omega \sin\theta$, där θ är breddgraden, med höger relativt färdriktningen som referensriktning. Corioliskraften skall åstadkomma centripetalaccelerationen för cirkelrörelsen (alternativt, balansera centrifugalkraften), så om radien är r gäller $\frac{mv^2}{r} = 2mv\Omega\sin\theta$, dvs.

$$r = \frac{v}{2\Omega\sin\theta} .$$

Villkoret $r < \gamma R$ uttrycks som ett villkor på farten:

$$v < 2\gamma R\Omega\sin\theta .$$

Numeriskt är $\Omega R \approx 463$ m/s. Med $\sin\theta = \frac{1}{2}$ och $\gamma = 0.1$ ger det ungefärligen $v < 50$ m/s.

(Reflektion: detta är en hög vindhastighet. Ett vädersystems utsträckning kanske är mindre än $R/10$.)

3. Rymdstationens tröghetsmatrix m.a.p. masscentrum i det givna systemet är $\bar{I} = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}Ma^2, \frac{1}{2}Ma^2, Ma^2)$. Rörelsemängdsmomentet före träffen är $\bar{L}_f = \bar{I}\vec{\omega}_0 = Ma^2\omega_0\hat{z}$. Det tillförda impulsmomentet är $\Delta\bar{L} = a\hat{x} \times p\hat{z} = -ap\hat{y}$. Efter träffen är alltså rörelsemängdsmomentet $\bar{L}_e = \bar{L}_f + \Delta\bar{L} = Ma^2\omega_0\hat{z} - ap\hat{y}$. Rotationsvektorn fås som $\vec{\omega} = \bar{I}^{-1}\bar{L}_e = \omega_0\hat{z} - \frac{2p}{Ma}\hat{y}$.

4. Langrangianen är

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{r} .$$

Lagranges ekvationer ger

$$0 = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} ,$$
$$0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) .$$

Den andra ekvationen uttrycker att rörelsemängdsmomentet $L = mr^2\dot{\phi}$ är konstant. Lös för $\dot{\phi}$ och sätt in i den första ekvationen:

$$m\ddot{r} - \frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0\ .$$

Den sista termen är centrifugalkraften. "Jämvikt", dvs. konstant r kräver $-\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0$. Endast möjligt då $k < 0$ (så att kraften är attraktiv), och då fås $r = r_0 = \frac{L^2}{m|k|}$. Om vi utvecklar kraften runt $r = r_0$ som (derivera!) $-\frac{|k|}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} = -K(r - r_0)$, så är $K = -\frac{2|k|}{r_0^3} + \frac{3L^2}{mr_0^4} = \frac{m^3k^4}{L^6}$. Små oscillationer kring $r = r_0$ har vinkelfrekvensen $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{mk^2}{L^3}$. Jämför detta med vinkelfrekvensen för cirkelrörelsen $\dot{\phi} = \frac{L}{mr_0^2} = \frac{mk^2}{L^3}$.

Då har vi visat (för små amplituder) att den radiella svängningsrörelsen har samma period som cirkelrörelsen, så hela den 2-dimensionella rörelsen är periodisk. Partikeln är tillbaka i samma läge efter ett varv. (Detta är sant även för stora "svängningar", ellipsrörelse.)

5. Betrakta processen i ett masscentrumsystem. Då har de två ingående partiklarna samma fart u, och de två utgående samma fart v. Energikonservering ger $2m\gamma(u) = 2M\gamma(v)$. Eftersom $\gamma(v) \geq 1$, så är processen endast möjlig om $\gamma(u) \geq \frac{M}{m}$. Vi löser för u:

$$u \geq \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\ .$$

Den relativa hastigheten mellan partiklarna är $w = \frac{2u}{1+u^2}$ (relativistisk hastighetsaddition). Villkoret blir

$$w \geq \frac{\sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}}{1 - \frac{m^2}{2M^2}}\ .$$

($c = 1$ använt i hela uppgiften.)