Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Fredagen 18 augusti 2023, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 15.00 och 17.00.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

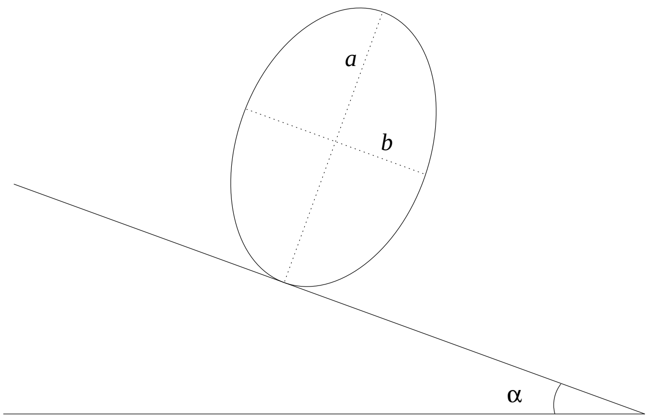
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

1. En stel kropp är formad som en cylinder med elliptiskt tvärsnitt med halvaxlarna a och b. Den släpps från vila på ett sluttande plan i läget enligt figuren. Den ena halvaxeln är vinkelrät mot planet. Friktionen förhindrar glidning. Givet kroppens massa m, längden b och lutningsvinkeln α, hur skall a väljas för att kroppens initiala vinkelacceleration skall bli maximal?



2. En curlingsten väger 18 kg och har en radie på 15 cm. Den skall skickas iväg mot en annan curlingsten som befinner sig 25 m bort. Frågan gäller hur Corioliskraften inverkar på stenens rörelse. Antag i en första approximation att friktionen från isen är försumbar. Hur stor behöver curlingstenens fart (ungefär) vara för att den avvikelse i sidled som åstadkoms av Corioliskraften skall vara högst 1 cm när stenen når sitt mål?

3. En stel kropp är sammansatt av tre smala homogena raka stavar, vardera med massan m och längden $2a$. En stav är belägen mellan $(-2a,0,-a)$ och $(0,0,-a)$, en mellan $(0,0,-a)$ och $(0,0,a)$ och en mellan $(0,0,a)$ och $(2a,0,a)$.

   Vid ett visst ögonblick roterar kroppen runt origo så att dess rörelsemängdsmoment m.a.p. origo är $\vec{L}=\frac{L}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Bestäm den momentana rotationsvektorn $\vec{\omega}$.

   Om kroppen inte påverkas av yttre vridande moment, vad är $\vec{L}(t)$ under den efterföljande rörelsen?

4. En partikel med massa m rör sig friktionsfritt på ytan $z=k\big(x^2-\frac{3}{2}xy+y^2\big)$. Gravitationskraften är riktad i negativ z-led. Skriv ned Lagrangianen för lämpligt val av generaliserade koordinater. Visa att det finns ett stabilt jämviktsläge. Om partikeln rör sig nära detta jämviktsläge, bestäm dess egenfrekvenser, och skriv ned den allmänna lösningen i denna approximation.

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. En pinne med vilolängden L rör sig längs x-axeln med hastigheten $v\hat{x}$ ($v > 0$). En observatör **O** befinner sig i vila i origo.

   Låt oss definiera den *skenbara längden* ℓ av pinnen på följande (eventuellt tidsberoende) sätt: $\ell = x_H - x_V$, där x_H är läget för pinnens högra ände då den sänder ut ljus som når observatören **O** vid tiden t, och motsvarande för x_V och ljus från pinnens vänstra ände. (Notera att detta är en helt annan sak än längdkontraktion, som ju talar om lägen vid samma tid.)

   Bestäm ℓ då pinnen ännu inte nått fram till **O**, samt då den helt passerat **O**. (Bestäm gärna också ℓ då pinnen överlappar origo. Detta krävs inte för full poäng.)

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Fredagen 18 augusti 2023
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Använd (t.ex.) momentekvation m.a.p. kontaktpunkten (-linjen) **P** med planet. Tröghetsmomentet är, m.h.a. Steiners sats
$$I_{\mathbf{P}} = \frac{1}{4}m(a^2+b^2) + ma^2 = \frac{1}{4}m(5a^2+b^2) \ .$$
Momentet från gravitationskraften är $M_{\mathbf{P}} = mga\sin\alpha$. Vinkelaccelerationen blir
$$\dot{\omega} = \frac{M_{\mathbf{P}}}{I_{\mathbf{P}}} = \frac{4ga}{5a^2+b^2} = \frac{4g}{b}\frac{a/b}{5(a/b)^2+1} \ .$$
Detta skall maximeras m.a.p. a, dvs. m.a.p. $x = \frac{a}{b}$. Låt $f(x) = \frac{x}{5x^2+1}$. Då är $f'(x) = \frac{1}{5x^2+1} - \frac{x\cdot 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{1-5x^2}{(5x^2+1)^2}$, vilket är 0 då $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Man verifierar också att detta är ett maximum. Det sökta värdet på a är $a = \frac{b}{\sqrt{5}}$.

2. Corioliskraftens horisontalkomponent är $2mv\Omega\sin\theta$, där θ är breddgraden, med höger relativt färdriktningen som referensriktning. Kalla utkastriktningen $\hat{y}$ och höger för $\hat{x}$, och välj $x = y = 0$ vid utkastet. Till lägsta ordning (i Ω) är hastighetens komponent i utkastriktningen konstant, $v\hat{y}$, så $y = vt$. Tiden till träff är $T = \frac{L}{v}$, där $L = 25$ m. Den fiktiva kraften i x-led är konstant, så $x = v\Omega\sin\theta\, t^2$. Avvikelsen vid träff är $\Delta x = x(T) = \frac{L^2\Omega\sin\theta}{v}$. Ett villkor $\Delta x < \delta$ ger då $v > \frac{L^2\Omega\sin\theta}{\delta}$. Med $\sin\theta$ i storleksordningen 1 ger det några meter per sekund.

3. Den första och tredje pinnen har vardera
$$\bar{I}_{1,3} = ma^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \ .$$
Deras tyngdpunkter ligger i $\pm a(1,0,1)$. Steiner ger tröghetsmatriserna m.a.p. origo:
$$I_{\mathbf{O}1,3} = ma^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} + ma^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} = ma^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{4}{3}\end{pmatrix} \ .$$
Den andra pinnen har $I_{\mathbf{O}2} = ma^2\mathrm{diag}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$. Totala tröghetsmatrisen m.a.p. origo (masscentrum) är
$$I_{\mathbf{O}} = \sum_{i=1}^{3} I_{\mathbf{O}i} = ma^2\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix} \ .$$
Dess invers är
$$I_{\mathbf{O}}^{-1} = \frac{1}{ma^2}\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{9}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{9}{10} & 0 & \frac{21}{20}\end{pmatrix} \ .$$

Vi får då

$$\vec{\omega} = I_{\mathbf{O}}^{-1}\vec{L}_{\mathbf{O}} = \frac{3\sqrt{2}}{40}\frac{L}{ma^2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Om inga yttre moment verkar förblir $\vec{L}_{\mathbf{O}}$ konstant.

4. Potentialen är $V = mgz = mgk(x^2 - \frac{3}{2}xy + y^2)$. Denna kvadratiska form kan diagonaliseras med $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$:

$$V = mgk(\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{7}{4}\eta^2) ,$$

och man ser att det finns ett (globalt) minimum i $\xi = \eta = 0$. Vi kan välja ξ, η som generaliserade koordinater.

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{z}^2) - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{4}mk^2(\xi\dot{\xi} + 7\eta\dot{\eta})^2 - \frac{1}{4}mgk(\xi^2 + 7\eta^2) . \end{aligned}$$

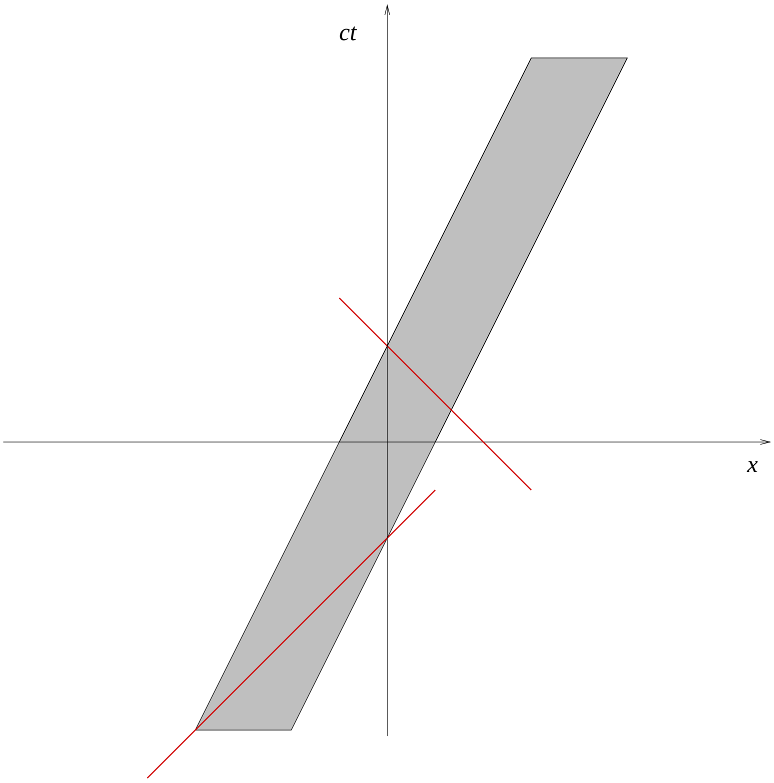
Vid linearisering kring origo (spara kvadratiska termer i L) försvinner den andra termen (partikeln rör sig ungefär horisontellt). Vi kan läsa av vinkelfrekvenserna för oscillationer i ξ- resp. η-led: $\omega_\xi = \sqrt{\frac{gk}{2}}$, $\omega_\eta = \sqrt{\frac{7gk}{2}}$, och den allmänna lösningen är

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_\xi \cos(\omega_\xi t + \alpha_\xi) , \\ \eta(t) &= A_\eta \cos(\omega_\eta t + \alpha_\eta) . \end{aligned}$$

5. Vi kan rita ett rumtidsdiagram. I figuren är de ljusstrålar som anländer till origo just när pinnens framkant kommer till origo ($t = t_1$), samt de som anländer just när bakänden kommer ($t = t_2$), utritade. Tidigare resp. senare ljusstrålar är parallellförflyttningar av dem. Pinnens fram- resp. bakände är $x_\pm(t) = \pm\frac{L}{2\gamma(v)} + vt$ (faktorn $\frac{1}{\gamma(v)}$ från längdkontraktion). De två tiderna ovan är $t_1 = -\frac{L}{2\gamma(v)v}$, $t_2 = \frac{L}{2\gamma(v)v}$. De två ljusstrålarna är $x_1(t) = c(t - t_1)$ och $x_2(t) = -c(t - t_2)$.

Tag den första av dem. Den skär bakänden då $x_-(t) = x_1(t)$, vilket ger $t = -\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\frac{L}{2\gamma(v)v}$ och bakändens läge $x = -L\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$. Den skenbara längden då pinnen närmar sig är alltså $L\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$. På samma sätt fås den skenbara längden då pinnen avlägsnar sig som $L\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$.

(Medan pinnen överlappar med origo kan man se att den skenbara längden interpolerar linjärt i tiden mellan dessa två värden.)


ct
x