Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Lördagen 3 juni 2023, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

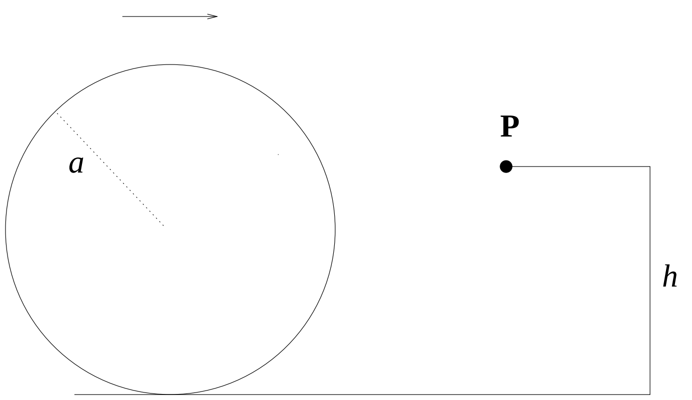
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

1. Ett homogent klot med radie a rullar utan glidning på ett horisontellt golv. Det träffar en anordning på höjden h över golvet, som gör att klotets kontaktpunkt fastnar (**P** i figuren). Iinget hindrar dock klotet från att rotera runt **P**. Hur stor skall h vara för att klotet skall vara i vila efter kollisionen, utan att "stora" krafter uppstår mellan klotet och golvet?



2. En cirkelskiva med radien R roterar med konstant rotationsvektor $\Omega\hat{z}$, där z-axeln är riktad längs skivans symmetriaxel. Låt ξ och η vara koordinater i skivans plan, vars koordinataxlar roterar med skivan. En myra kryper längs η-axeln enligt $\eta = ut$ (mellan tiderna $t_- = \frac{R}{u}$ och $t_+ = \frac{R}{u}$). För att rörelsen skall vara vara sådan behövs en kraft på myran från underlaget. Bestäm den som funktion av t. Skissa kraften i en figur.

3. En stel kropp består av en kvadrant av en cirkelskiva med radien a. Den har massan m, som är jämnt fördelad. Bestäm kroppens huvudtröghetsaxlar genom masscentrum och motsvarande huvudtröghetsmoment.

   Om skivan initialt är i vila, och plötsligt ges en impuls p, verkande i kvadrantens hörn och riktad vinkelrätt mot skivans plan, vad blir dess rotationshastighet?

4. Två partiklar, vardera med massan m, kan röra sig fritt på en cirkel med radien a. För enkelhets skull tänker vi oss också att partiklarna kan passera förbi varandra. De attraherar varandra med en kraft som är proportionell mot avståndet mellan dem, med proportionalitetskonstant k. Välj generaliserade koordinater för systemet, bilda Lagrangianen och Lagranges ekvationer. Finns det någon bevarad storhet? Bestäm vinkelfrekvensen för eventuella små svängningar.

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. En partikel, t.ex. en elektron, med massan m och hastigheten $\vec{v}$ har en (4-dimensionell) rörelsemängd $P = (P^0, \vec{p}) = m\gamma(v)(1, \vec{v})$. Den uppfyller alltså $P^2 = -(P^0)^2 + |\vec{p}|^2 = -m^2$, och dess energi P^0 är $P^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$. En foton (som har massan 0) har en rörelsemängd $P = \epsilon(1, \vec{n})$, där $\epsilon = \hbar\omega$ är fotonens energi och $\vec{n}$ en enhetsvektor i rörelseriktningen. Den uppfyller alltså $P^2 = 0$.

   Visa att en process "$e^- \to e^- + \gamma$", där en elektron sänder ut en foton, inte tillåts av bevarande av den 4-dimensionella rörelsemängden. Hur fungerar $e^- + e^+ \to 2\gamma$, där en elektron och en positron (samma massa som elektronen, men positivt laddad) annihileras och två fotoner bildas?

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Lördagen 3 juni 2023
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Stöten är inte elastisk. Det enda som bevaras är rörelsemängdsmomentet m.a.p. **P**. Före stöten är det (med positiv ref.riktning medurs) $L_{\mathbf{P}} = \frac{2}{5}ma^2\omega + m(a-h)v$, där $v = a\omega$, dvs. $L_{\mathbf{P}} = (\frac{7}{5}a - h)mv$. Om klotet är i vila efter stöten är $L_{\mathbf{P}} = 0$, alltså $h = \frac{7}{5}a$. (Om $h < \frac{7}{5}a$ kommer klotet att rotera runt **P**, om $h > \frac{7}{5}a$ blir det en stöt även mot golvet.)

2. Man kan göra på två sätt: Antingen beräknar man myrans acceleration i ett (icke-roterande) inertialsystem, kraften skall då orsaka denna acceleration. Eller så räknar man i det roterande systemet, då skall kraften kancellera de fiktiva krafterna, centripetal- och Corioliskraft. På det senare sättet: Låt myrans massa vara m. Vi har då jämvikt enligt $\vec{F} + \vec{F}_{centr} + \vec{F}_{Cor} = 0$, där

$$\vec{F}_{centr} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\varrho}) = m\Omega^2 ut\hat{\eta} \, ,$$
$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} = 2m\Omega u\hat{\xi} \, .$$

Den sökta kraften är $\vec{F} = m\Omega u(-2\hat{\xi} - \Omega t\hat{\eta})$.

3. Enklast är att beräkna tröghetsmatrisen i ett “naturligt” system där kvartscirkelskivan är $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z = 0$. Dess masscentrum ligger i $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}, 0)$. Direkt beräkning ger $I_{O\,xx} = I_{O\,yy} = \frac{1}{4}ma^2$, $I_{O\,zz} = \frac{1}{2}ma^2$, $I_{O\,xy} = -\frac{1}{2\pi}ma^2$, $I_{O\,xz} = I_{O\,yz} = 0$. Man kan välja att diagonalisera före eller efter användandet av Steiners sats. Vi gör det före. Det är uppenbart (symmetri) att huvudtröghetsaxlarna genom origo ges av $\hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\hat{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ (och $\hat{z}$). Motsvarande huvudtröghetsmoment är $I_{O\,\xi\xi} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi})ma^2$, $I_{O\,\eta\eta} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi})ma^2$. Nu kan man använda Steiner med $\vec{\bar{r}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a\hat{\xi}$. Inga deviationsmoment dyker upp i Steiners sats, och vi får huvudtröghetsmomenten m.a.p. masscentrum: $\bar{I}_{\xi\xi} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi})ma^2$, $\bar{I}_{\eta\eta} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} - \frac{32}{9\pi^2})ma^2$, $\bar{I}_{zz} = (\frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2})ma^2$.

En impuls $\vec{p} = p\hat{z}$ ger ett impulsmoment $\Delta\vec{L} = -\vec{\bar{r}} \times \vec{p} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}ap\hat{\eta}$, vilket ger en rotation endast runt axeln genom masscentrum i η-riktningen, $\vec{\omega} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\frac{ap}{\bar{I}_{\eta\eta}}\hat{\eta}$.

4. Låt lägena för de två partiklarna ges av vinklarna θ, ϕ. Avståndet mellan dem är $2a\sin\frac{\theta-\phi}{2}$. Vi får då Lagrangianen

$$L = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2) - 2ka^2\sin^2\frac{\theta-\phi}{2} \, .$$

Lagranges ekvationer ger

$$0 = \ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin(\theta - \phi) \, ,$$
$$0 = \ddot{\phi} + \frac{k}{m}\sin(\phi - \theta) \, .$$

Addition ger $\frac{d}{dt}(\dot{\theta} + \dot{\phi})$. Detta är bevarande av rörelsemängdsmoment. Subtraktion ger $\frac{d^2}{dt^2}(\theta - \phi) + \frac{2k}{m}\sin(\theta - \phi) = 0$. $\theta - \phi = 0$ är ett stabilt jämviktsläge. För små $\psi = \theta - \phi$ får vi $\ddot{\psi} + \frac{2k}{m}\psi = 0$. Vi läser av vinkelfrekvensen för små svängningar $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

Kontroll: Vid små svängningar rör sig partiklarna rakt mot och ifrån varandra. Det blir en linjär rörelse med $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$, där μ är den reducerade massan, $\mu = \frac{m}{2}$.

5. Om man adderar en ljuslik vektor till P som ligger på hyperboloiden $P^2 = -m^2$ får man en vektor som inte kan ligga på samma hyperboloid. Detta ses enklast genom att rita en figur, alternativt genom att räkna ut det: $(P + P_\gamma)^2 = P^2 + P_\gamma^2 + 2P \cdot P_\gamma = -m^2 + 0 + 2\epsilon(-\sqrt{p^2 + m^2} + \vec{p} \cdot \vec{n})$. Uttrycket inom parentesen är < 0. För den andra processen är det inga problem att skriva summan av två vektorer P, P' med $P^2 = P'^2 = -m^2$ som summan av två ljuslika vektorer. Lättast är att se det i masscentrumsystemet, där $P = m\gamma(v)(1, \vec{v})$, $P' = m\gamma(v)(1, -\vec{v})$,

$$P + P' = 2m\gamma(v)(1, 0) = m\gamma(v)(1, \vec{n}) + m\gamma(v)(1, -\vec{n}) \ .$$

De två sista termerna kan vara rörelsemängder för två fotoner som åker åt motsatta håll.