Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Fredagen 7 oktober 2022, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Eric Nilsson, tel. 0761-413451, besöker tentamenssalarna c:a 15 och 17.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

---

1. En homogen cylinder med radien r rullar utan glidning inuti en (fixerad) cylinder med radien R under inverkan av tyngdkraften. Cylindrarnas axlar är horisontella. Om den lilla cylindern har farten v i den lägsta punkten, hur stor fart har den i den högsta punkten, och hur stor skall v vara för att den skall nå dit?

2. En flod flyter norrut på breddgraden θ. Vattnets fart är v och bredden på floden är B. Hur stor är vattnets höjdskillnad mellan de två stränderna på grund av Corioliskraften?

3. En stel kropp består av två smala homogena stavar, vardera med massan m och längden a. Den ena ligger på intervallet $x \in [0, a]$, $y = z = 0$, och den andra på $y \in [0, a]$, $x = z = 0$. Vid en viss tidpunkt verkar en kraft $\vec{F} = F\hat{z}$ på kroppen i punkten $(x, y, z) = (a, 0, 0)$. Kraften verkar under en mycket kort tid Δt. Vad blir masscentrums hastighet och kroppens rotationsvektor efter stöten?

4. En partikel med massan m är fäst i ett lätt snöre med längd ℓ. Andra änden av snöret kan fritt glida på en horisontell linje. Antag att rörelsen bara sker i ett vertikalt plan som innehåller denna linje. Tyngdkraften är vertikal. Skriv ned Lagranges ekvationer för de två frihetsgraderna. Tag fram en ekvation som endast innehåller pendelns utslagsvinkel (snörets vinkel mot vertikalen). Om denna vinkel är liten, hur förhåller sig pendelns vinkelfrekvens till den för en likadan pendel som är fast upphängd?

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. I ett inertialsystem har partikel **A** hastigheten $v\hat{x}$ och partikel **B** hastigheten $w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}$. Vad är hastigheten för partikel **B** i vilosystemet för partikel **A**? (Färdiga formler för t.ex. “hastighetsaddition” får inte användas; resultatet skall härledas t.ex. från Lorentztransformationen.)

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Fredagen 7 oktober 2022
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Cylinderns kinetiska energi (translation+rotation runt masscentrum, alt. Steiner och rotation kring kontaktpunkten) är $\frac{3}{4}mu^2$, där u är masscentrums fart. Höjden den skall upp är $2(R-r)$. Dess fart v' i högsta punkten fås då från
$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv'^2 + 2mg(R-r)\ .$$
Dessutom behöver den ha en centripetalacceleration i högsta punkten som åstadkoms av tyngdkraften och en (ej negativ) normalkraft N, så
$$\frac{v'^2}{R-r} = g + \frac{N}{m} \geq g\ .$$
Insättning i första ekvationen ger
$$v^2 = v'^2 + \frac{8}{3}g(R-r) \geq \frac{11}{3}g(R-r)\ .$$

2. Horisontalkomponenten av Corioliskraften (riktad österut) på en del av vattnet med massa m är $2m\Omega v\sin\theta$, där Ω är jordrotationen. Den "effektiva tyngkraften", summan av tyngkraft och Corioliskraft, bildar en vinkel α med vertikalen, där $\tan\alpha = \frac{2\Omega v\sin\theta}{g}$. Vattenytan är vinkelrät mot denna kraft. Beteckna höjdskillnaden Δh. Då blir $\frac{\Delta h}{B} = \tan\alpha$, så $\Delta h = \frac{2\Omega v\sin\theta}{g}B$.

3. Tröghetsmatrisen m.a.p. origo är
$$I_O = ma^2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\ .$$
Masscentrum ligger i punkten $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = a(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},0)$. Vi behöver tröghetsmatrisen m.a.p. på masscentrum, och använder Steiner "baklänges" (med $\bar{z}=0$):
$$\bar{I} = I_O - 2m\begin{pmatrix} \bar{y}^2 & -\bar{x}\bar{y} & 0 \\ -\bar{x}\bar{y} & \bar{x}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{x}^2+\bar{y}^2 \end{pmatrix} = ma^2\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\ .$$
(Man kan kolla att $\bar{I}$ har egenvektorer $\hat{x}\pm\hat{y}$, som sig bör p.g.a. symmetri.) Masscentrums hastighet efter stöten är $\frac{F\Delta t}{2m}\hat{z}$. Kraftens impulsmoment är $a\hat{x}\times F\Delta t\hat{z} = -Fa\Delta t\hat{y}$. Dess rotationsvektor efter stöten skall uppfylla $\bar{I}\vec{\omega} = -Fa\Delta t\hat{y}$. Detta ger $\vec{\omega} = \frac{3F\Delta t}{2ma}(-3\hat{x}+\hat{y})$.

4. Lagrangianen är
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) + mg\ell\cos\phi\ ,$$

vilket ger Lagranges ekvationer

$$0 = \frac{d}{dt}(\dot{x} + \ell\dot{\phi}\cos\phi) \ ,$$
$$0 = \frac{d}{dt}(\ell\dot{\phi} + \dot{x}\cos\phi) + \dot{x}\dot{\phi}\sin\phi + g\sin\phi \ .$$

Den första av dessa ekvationer uttrycker att rörelsemängden i x-led är bevarad. Vi kan alltså lösa ut $\dot{x} = v_0 - \ell\dot{\phi}\cos\phi$ och sätta in i den andra ekvationen. Resultatet blir

$$\ddot{\phi}\sin^2\phi + \dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi + \frac{g}{\ell}\sin\phi = 0 \ .$$

(en bra kontroll är att v_0 kancellerar, man kan förstås betrakta systemet från vilket inertialsystem som helst, vilket inte skall påverka vinkelrörelsen). Om man försöker linearisera denna ekvation, finner man att endast sista termen ger ett bidrag för små $\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$. Det finns inga små svängningar med ändlig vinkelfrekvens runt jämviktsläget.

5. Transformera till ett vilosystem för **A** enligt

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma(v)(dt - vdx) \ , \\ dx' &= \gamma(v)(dx - vdt) \ , \\ dy' &= dy \ , \\ dz' &= dz \ . \end{aligned}$$

Då blir

$$\begin{aligned} w'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx} = \frac{w_x - v}{1 - vw_x} \ , \\ w'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(v)(dt - vdx)} = \frac{w_y}{\gamma(v)(1 - vw_x)} \ , \\ w'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(v)(dt - vdx)} = \frac{w_z}{\gamma(v)(1 - vw_x)} \ . \end{aligned}$$