

Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375

Fredagen 19 augusti 2022, 14.00-18.00

Examinator: Martin Cederwall

Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 15 och 17.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

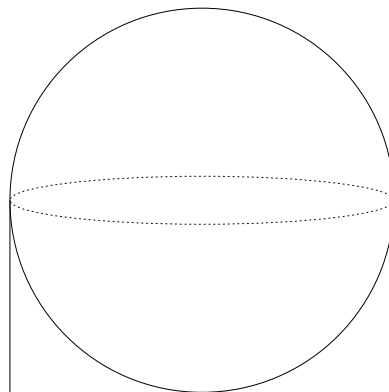
Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

-
1. Ett homogent klot med radien a rullar utan glidning på kurvan $z = f(x)$, $y = 0$ (där z är den vertikala koordinaten), under inverkan av tyngkraften. Funktionen $f(x)$ har ett minimum i $x = 0$ med $f(0) = 0$. Klotet passerar detta minimum med farten v . Hur stor måste v minst vara för att klotet skall kunna nå ett läge där dess kontaktpunkt med kurvan har x -koordinaten x_0 ? Svaret kan vid behov innehålla $f(x_0)$, $f'(x_0)$ etc.
(Man kan förutsätta att kurvans krökningsradie överallt är tillräckligt stor för att klotet skall ha precis en punkt i kontakt med kurvan.)
 2. En massa släpps från vila från höjden h över markytan. Experimentet utförs på breddgraden θ . På hur långt avstånd δ från lodlinjen genom utgångspunkten landar den?
(Det får antas att h är mycket mindre än jordradien, och att $\delta \ll h$. Luftmotståndet är försumbart.)
 3. En stel kropp består av en homogen sfär (ett tunt skal alltså, inte ett klot) med radien a och massan m . På sfären är fästa två tunna homogena stavar, vardera med längd a och massa m . Stavarnas ändpunkter är fästa i två diametralt motsatta punkter på sfären. De pekar tangentiellt till sfären, åt motsatta håll. Bestäm den sammansatta kroppens huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment m.a.p. masscentrum, och skissa huvudtröghetsaxlarnas riktningar i en figur.



4. En partikel med massan m är fäst i en fjäder med fjäderkonstant k och naturlig längd ℓ , vars andra ände är fäst i en punkt. Den påverkas av tyngdkraften på jorden. Inför lämpliga generaliserade koordinater för de tre frihetsgraderna hos detta system. Konstruera Lagrangianen för systemet, och använd den för att ta fram rörelseekvationerna. Visa att det finns en bevarad storhet, så att de tre rörelseekvationerna effektivt reduceras till två i antal.
-

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. Ett rymdskepp med (vilo)längden 100 m färdas med farten $\frac{3}{5}c$ genom en tunnel i en asteroid, också den med (vilo)längden 100 m. Rita ett rumtidsdiagram som tydligt visar hur, å ena sidan, rymdskeppet under en viss tidrymd är helt och hållet inne i tunneln (i asteroidens inertialsystem), och å andra sidan, rymdskeppet sticker ut ur båda ändarna av tunneln under en viss tidsrymd (i skeppets inertialsystem).

Lösningförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375

Fredagen 19 augusti 2022

Examinator: Martin Cederwall

Lösningförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. I utgångsläget är den kinetiska energin $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2$ och den potentiella energin mga , om vi låter nollpunkten vara $z = 0$. Låt kulan vara i momentan vila med kontaktpunkten på $x = x_0$. Masscentrum är då på höjden $h = f(x_0) + a \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan vertikalen och radien till kontaktpunkten. Vi har $\tan \alpha = f'(x_0)$, och alltså $h = f(x_0) + \frac{a}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}$. Energikonservering ger

$$mg \left(f(x_0) + \frac{a}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} \right) = \frac{7}{10}mv^2 + mga ,$$

dvs.

$$v^2 = \frac{10}{7}ga \left(\frac{f(x_0)}{a} + \frac{1}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} - 1 \right) ,$$

vilket ger den minsta nödvändiga utgångsfarten.

2. Centrifugalkraften "struntar" vi i; detta är det rätta att göra eftersom den lokala vertikalen inkluderar effekten av gravitation och centrifugalkraft. Om massan bara faller rakt nedan utan hänsyn till Corioliskraften, får man $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, $\dot{z} = -gt$. Corioliskraften är

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2mz\Omega \cos \theta \hat{x} ,$$

där $\vec{\Omega}$ är jordrotationen och \hat{x} är riktad österut. Detta leder till $\ddot{x} = 2gt\Omega \cos \theta$, som integreras till $x(t) = \frac{1}{3}gt^3\Omega \cos \theta$. Massan når marken vid $t = t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, vilket ger

$$\delta = x(t_0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{h^3}{g}} \Omega \cos \theta .$$

I beräkning har vi struntat i att hastigheten i x -led i sin tur ger upphov till en Corioliskraft. Denna kommer dock att vara proportionell mot Ω^2 , och kan försummas. Mer precist: vi kan skriva svaret som $\delta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\epsilon h \cos \theta$, där $\epsilon = \sqrt{\frac{h}{g}}\Omega$ är en liten (enligt förutsättningarna, och i realistiska situationer) dimensionslös parameter. Det vi har gjort är att räkna endast till första ordningen i ϵ .

3. Det sfäriska skalet har tröghetsmatrisen $I_{\text{sfär}} = \frac{2}{3}ma^2\mathbf{1}$. Välj ett koordinatsystem där x -axeln pekar åt höger i bilden och y uppåt. Vardera pinnen har en tröghetsmatris, som kan beräknas genom direkt integration, eller m.h.a. Steiners sats enligt

$$I_{\text{stav}} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} + ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

Den totala tröghetsmatrisen är alltså

$$I = I_{\text{sfer}} + 2I_{\text{stav}} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

En huvudtröghetsaxel är uppenbarligen z -axeln, med huvudtröghetsmomentet $\frac{10}{3}ma^2$. Det övre vänstra hörnet i I diagonaliseras med standardmetod. Huvudtröghetsmomenten (egenvärdena) är $(2 \pm \frac{\sqrt{13}}{3})ma^2$, med huvudtröghetsaxlar (egenvektorer) riktade längs $(1, -\frac{2+\sqrt{13}}{3}, 0)$ resp. $(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, 1, 0)$. Om man ritat ut dem ser man att den senare vektorn, som svarar mot det lägre egenvärdet, går genom båda stavarna, så det verkar rimligt (massan närmare axeln). Ytterligare kontroll: axlarna är \perp .

4. Det finns förstås många sätt att välja koordinaterna, som ju skall beskriva en partikels läge i \mathbb{R}^3 . Det frågas efter en konserverad storhet. Eftersom momentet från tyngkraften (m.a.p. den fixa punkten) inte har någon vertikal komponent, är rörelsemängdsmomentet runt z -axeln bevarat. Det kan vara lämpligt att välja en av koordinaterna som φ (i sfäriska eller cylindriska koordinater). Eftersom fjäderns längd är enklare i sfäriska koordinater tar vi dem. Då får vi $L = T - V$, där $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$ och $V = \frac{1}{2}k(r - \ell)^2 - mgr \cos \theta$. Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 - m r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + k(r - \ell) - mg \cos \theta, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(m r^2 \dot{\theta}) - m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgr \sin \theta, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Den tredje ekvationen uttrycker att $L_z = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ är konstant (bestäms av begynnelsevillkor), så $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2 \sin^2 \theta}$ kan sättas in de första två ekvationerna.

5. En möjlighet, som visar de två påståendena på ett symmetriskt sätt, är att rita förloppet sett från ett system där farkosten och tunneln rör sig med lika stora och motriktade hastigheter. (De numeriska värdena är oväsentliga.) Kalla detta system \mathbf{S} , farkostens vilosystem \mathbf{S}' och tunnelns \mathbf{S}'' . Farkosten och tunneln har samma längd i \mathbf{S} . Händelsen \mathbf{A} är att farkostens bakända åker in i tunneln, och \mathbf{B} att dess framända lämnar tunneln. De är samtidigt i \mathbf{S} . De röda linjerna (parallella med x' -axeln) anger samtidigt i \mathbf{S}' och de lila i \mathbf{S}'' . \mathbf{B} äger rum före \mathbf{A} i \mathbf{S}' , vilket är samma sak som att säga att farkostens framända lämnar tunneln innan bakändan åker in. Mellan t'_B och t'_A är tunneln helt "täckt" av farkosten. I \mathbf{S}'' är det tvärtom: $t''_A < t''_B$.

