Tentamen i **Mekanik 2 för F**, TIF375
Lördagen 4 juni 2022, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 0733-500886, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.30.

Uppgifterna 1-4 på denna tentamen gäller som omtentamen på den tidigare kursen, FFM521.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Chalmersgodkänd kalkylator.

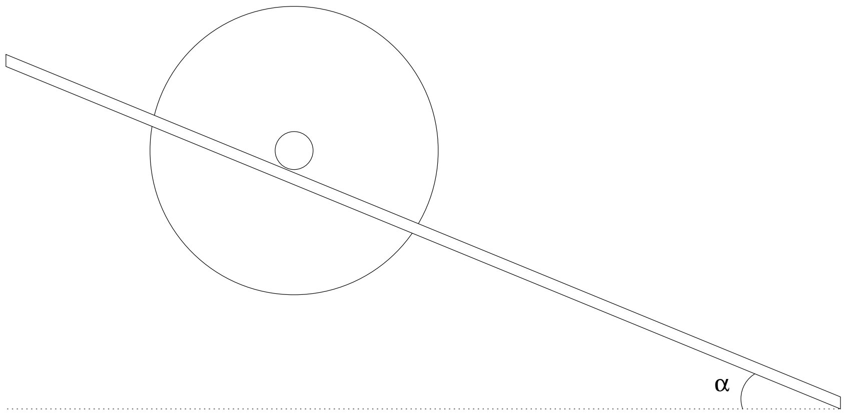
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 40%. Gränser för betyg 4 och 5 är 60% resp. 80%.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

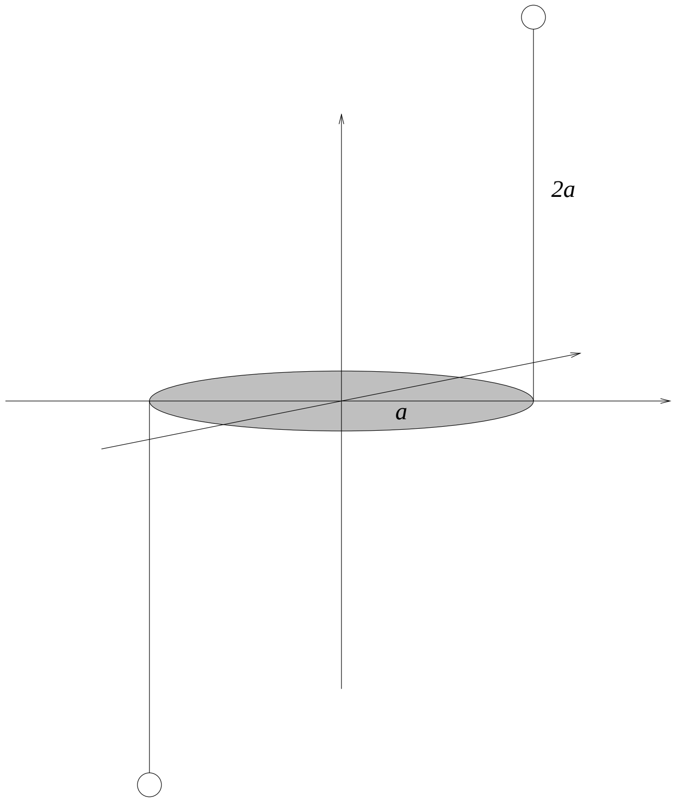
---

1. Ett homogent hjul har massan m och radien R. På vardera sidan hjulet är fästa lätta cylindrar med radien r och med samma symmetriaxel som hjulet. Dessa rullar utan glidning på ett sluttande spår med vinkeln α mot horisontalplanet (se figuren). Om hjulet släpps från vila, hur lång tid tar det tills dess masscentrum har rört sig en sträcka L?



2. Ett tåg kör rakt norrut på breddgraden θ med farten v. Om man skulle vilja kompensera för Coriliskraften genom att luta rälsen, hur mycket skall den luta, och åt vilket håll? Gör en grov uppskattning av vinkeln (närmsta tiopotens) för realistiska förhållanden.

3. En stel kropp består av en homogen cirkelskiva med massa m och radie a. På diametralt motsatta punkter på skivans periferi är två pinnar med längd $2a$ och försumbar massa fästade, vinkelrätt mot skivans plan och i motsatta riktningar. I andra änden av vardera pinne sitter en punktmassa $\frac{1}{24}m$. Se figuren. Bestäm kroppens huvudtröghetsaxlar och huvudtröghetsmoment m.a.p. masscentrum.



4. En partikel med massa m rör sig i 3 dimensioner under inverkan av fyra krafter. Varje kraft är en fjäderkraft, svarande mot en fjäder med fjäderkonstant k och naturlig längd 0, vars andra ände är fäst i punkten $\vec{r}_i$. De fyra punkterna är

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \frac{a}{\sqrt{3}}(1,1,1)\ , \\ \vec{r}_2 &= \frac{a}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\ , \\ \vec{r}_3 &= \frac{a}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)\ , \\ \vec{r}_4 &= \frac{a}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)\ .\end{aligned}$$

Konstruera Lagrangianen för systemet, finn rörelseekvationerna, och ge deras allmänna lösning.

Endast nya mekanikkursen, TIF375:

5. En farkost rör sig i inertialsystemet $\mathbf{S}$ med hastigheten $\vec{v} = v\hat{x}$. Den skickar ut en ljuspuls. I farkostens vilosystem $\mathbf{S}'$ bildar ljuspulsen vinkeln α_0 med framåtriktningen. Vilken är vinkeln α mellan positiva x-axeln och ljuspulsen i $\mathbf{S}$?

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375
Lördagen 4 juni 2022
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Inför en x-koordinat i hjulets färdriktning, och en rotationsvinkel ϕ för hjulet. Rullningsvillkoret ger $r\phi = x$. Potentialen är $V = -mgx\sin\alpha$. Kinetiska energin fås (t.ex.) från momentan rotation runt kontaktpunkten som
$$T = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2 + mr^2)\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(1 + \frac{R^2}{2r^2})\dot{x}^2 \ .$$
Rörelseekvationen ger den konstanta accelerationen
$$\ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} \ ,$$
som med de aktuella begynnelsevillkoren har lösningen
$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}t^2 \ .$$
$x(T) = L$, där
$$T = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}(1 + \frac{R^2}{2r^2})} \ .$$
Rimlighetskontroll kan t.ex. ta fasta på beroendet av α och av R/r.

2. Corioliskraftens horisontella del är $2m\Omega\sin\theta$, riktad österut, där Ω är jordrotationen. Spåret kan alltså lutas åt väster med en lutningsvinkel α som uppfyller
$$\tan\alpha = \frac{2\Omega v\sin\theta}{g} \ .$$
Om t.ex. $v \approx 100$ m/s fås en vinkel av storleksordningen 10^{-3}.

3. Inför ett koordinatsystem xyz med origo i masscentrum och z-axeln vinkelrät mot skivan. Tröghetsmatrisen fås genom att addera bidragen från skivan och punktmassorna.
$$I_{\text{skiva}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{pmatrix} \ , \qquad I_{\text{massor}} = 2 \cdot \frac{m}{24} \begin{pmatrix} (2a)^2 & 0 & -a \cdot 2a \\ 0 & a^2 + (2a)^2 & 0 \\ -a \cdot 2a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \ ,$$
dvs.
$$I = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{12} \end{pmatrix} \ .$$
y-axeln är en huvudtröhetsaxel med huvudtröghetsmoment $\frac{2}{3}ma^2$. Diagonalisering av resten ger axlarna längs $(1, 0, 1)$ och $(1, 0, -1)$ med huvudtröghetsmoment $(\frac{7}{12} - \frac{1}{6})ma^2 = \frac{5}{12}ma^2$ resp. $(\frac{7}{12} + \frac{1}{6})ma^2 = \frac{3}{4}ma^2$.

4. Den kinetiska energin är $T = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2$. Den potentiella energin är

$$V = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}k|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2}k(|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}_i + |\vec{r}_i|^2) = 2kr^2 + 2ka^2 \ .$$

Om vi struntar i den sista konstanten har vi $L = T - V = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - 2kr^2$. Rörelseekvationen (Lagranges ekvationer) blir $m\ddot{\vec{r}} + 4k\vec{r} = 0$, med den allmänna lösningen

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t \ ,$$

där $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ och $\vec{A}$ och $\vec{B}$ är vektorer som bestäms av begynnelsevillkoren.

5. Låt $c = 1$. I $\mathbf{S}'$ beskrivs ljupulsen enligt

$$\begin{aligned} dx' &= \cos\alpha_0 dt' \ , \\ dy' &= \sin\alpha_0 dt' \ . \end{aligned}$$

Lorentztransformera till systemet **S** och sätt in ovanstående:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(v)(dx' + vdt') = \gamma(v)(\cos\alpha_0 + v)dt' \ , \\ dy &= dy' = \sin\alpha_0 dt' \ , \\ dt &= \gamma(v)(dt' + vdx') = \gamma(v)(1 + v\cos\alpha_0)dt' \ . \end{aligned}$$

I **S** har man alltså

$$\begin{aligned} dx &= \frac{cos\alpha_0 + v}{1 + v\cos\alpha_0}dt = \cos\alpha dt \ , \\ dy &= \frac{\sin\alpha_0}{\gamma(v)(1 + v\cos\alpha_0)}dt = \sin\alpha dt \ , \end{aligned}$$

vilket bestämmer α. Vinkeln blir mindre i **S** än i $\mathbf{S}'$. (En bra konsistenskontroll är att kvadraterna av $\cos\alpha$ och $\sin\alpha$ enligt ovan adderar till 1.)