Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521
Fredagen 8 oktober 2021, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Sean Miller, tel. 0763-250166, besöker tentamenssalarna c:a 9.30 och 11.15.

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 20 poäng. Gränser för betyg 4 och 5 är 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

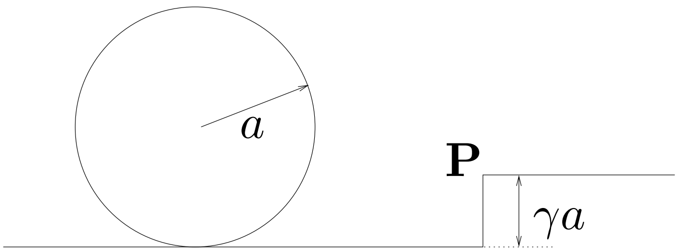
Lycka till!

---

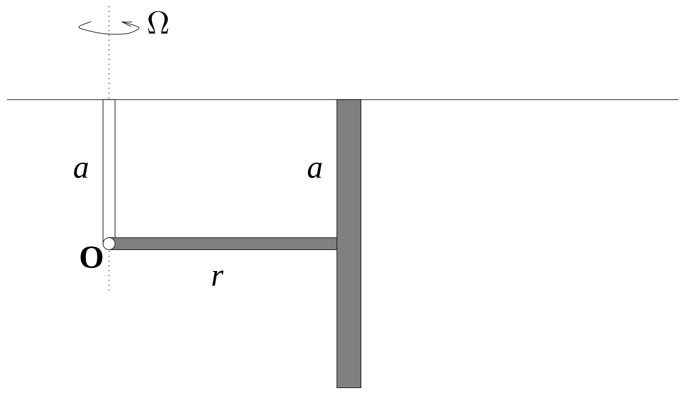
1. En partikel rör sig på ytan av en sfär, som roterar med rotationshastigheten ω runt en fix axel genom sin mittpunkt. (Det kan t.ex. vara en kropp som rör sig på jordytan.) Antag att partikeln vid ett tillfälle rör sig med farten v på breddgraden θ (som räknas från ekvatorn). Corioliskraften gör att den efterkommande rörelsen, i alla fall för små v, blir en cirkelrörelse. Bestäm dess radie.

2. En vågrörelse, t.ex. en ljudvåg, som rör sig i positiv x-led kan i ett inertialsystem $\mathbf{S}$ beskrivas som en funktion
$$\phi(x,t) = Ae^{\frac{i\omega}{c}(x-ct)} \ ,$$
där c är vågrörelsens hastighet och ω dess vinkelfrekvens. Använd Galileitransformationen för att härleda ett uttryck för vågrörelsens hastighet c' och vinkelfrekvens ω' i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$, som rör sig med hastigheten $v\hat{x}$ relativt $\mathbf{S}$.

3. En homogen boll med massa m och radie a rullar utan glidning på ett horisontellt plan. Den träffar ett "steg", se figuren. Stegets höjd är γa, $0 < \gamma < 1$. Stöten mot steget är elastisk. Den försiggår utan friktion, så att impulsen som steget ger bollen är riktad längs linjen från $\mathbf{P}$ till bollens mitt. För vilket värde på γ når bollen högst höjd i den efterföljande rörelsen? Är svaret beroende av bollens rotationshastighet före stöten, eller blir svaret detsamma t.ex. om bollens rörelse omedelbart före stöten hade varit ren translationsrörelse?



4. En stel kropp har formen av en tunn homogen cirkelskiva med radien a och en lätt stav med längden r som är fästad vinkelrätt mot skivan i dess mittpunkt. Stavens ände är fritt ledad i punkten $\mathbf{O}$. Kroppen rullar utan glidning på undersidan av en horisontell yta (ett "tak") enligt figuren. För vilka värden på precessionshastigheten är denna rörelse möjlig (utan att kroppen "faller ned")? (Färdiga formler för tröghetsmoment får användas. Färdiga formler för precessionsrörelse får inte användas.)



5. En punktmassa rör sig friktionsfritt på ytan $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$ under inverkan av gravitionskraften, som är riktad i negativ z-led. Skriv ned Lagrangianen för detta system, t.ex. med generaliserade koordinater θ, φ, de vanliga sfäriska vinklarna. Bestäm vinkelfrekvenserna för små svängningar kring det stabila jämviktsläget. (De föreslagna koordinaterna ovan är inte nödvändigtvis de enklaste för den senare uppgiften.)

Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Fredagen 8 oktober 2021
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Horisontalkomponenten av Corioliskraften har beloppet $2m\omega v\sin\theta$ (på norra halvklotet, riktad åt höger). För cirkelrörelsen gäller $\frac{mv^2}{r} = 2m\omega v\sin\theta$, dvs. $r = \frac{v}{2\omega\sin\theta}$.

2. Galileitranformationen säger $x' = x - vt$ och $t' = t$. Sätt in:

$$\phi = Ae^{\frac{i\omega}{c}(x'+vt'-ct')} = Ae^{\frac{i\omega'}{c'}(x'-c't')} ,$$

dvs. $\omega' = (1-\frac{v}{c})\omega$, $c' = c - v$.

3. Eftersom kraften verkar mot bollens masscentrum förändras inte dess rörelsemängdsmoment m.a.p. masscentrum. Den har samma rotationshastighet efter som före stöten. Eftersom stöten är elastisk—kinetiska energin är bevarad—kommer masscentrums fart efter stöten att vara densamma som före. Hastighetsförändringen är riktad längs linjen från **P** till mittpunkten. Högst höjd nås om hastigheten efter stöten är vertikal. Då är hastighetsförändringen $\Delta\vec{v} = v(-\hat{x}+\hat{z})$ där $\hat{x}$ pekar åt höger och $\hat{z}$ uppåt. Det kräver att vinkeln mellan vertikalen och kraftens verkanslinje är $45°$. Då blir $\gamma = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Rotationen spelar inte alls in.

4. Låt, i bilden $\hat{x}$ vara riktad åt höger, $\hat{y}$ in i pappret, och $\hat{z}$ uppåt. Momentant är $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu}$, där $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ and $\vec{\nu} = \frac{r}{a}\Omega\hat{x}$ (detta ses lättast genom att $\vec{\omega}$ pekar längs linjen mellan **O** och kontaktpunkten med taket). $\hat{x}$ är kroppsfix, så $\dot{\hat{x}} = \vec{\Omega}\times\hat{x} = \Omega\hat{y}$. Rörelsemängdsmomentets x-komponent är $\frac{1}{2}ma^2\nu = \frac{1}{2}mar\Omega$.

$$\frac{d\vec{L}_{\mathbf{O}}}{dt} = \frac{1}{2}mar\Omega^2\hat{y}$$

Detta är lika med momentet från tyngdkraften samt en eventuell positiv normalkraft N, som är $(mg + N)r\hat{y}$. Alltså, $mg + N = \frac{1}{2}ma\Omega^2$. Därav följer $\Omega^2 \geq \frac{2g}{a}$.

5. Den föreslagna parametriseringen är

$$\begin{aligned} x &= a\sin\theta\cos\phi \ , \\ y &= b\sin\theta\sin\phi \ , \\ z &= c\cos\theta \ . \end{aligned}$$

Det leder till ett uttryck för den kinetiska energin som inte är särskilt enkelt (de trigonometriska 1:orna uppträder då $a = b = c$). Dessutom är detta system dåligt vid sydpolen, så det är inte lämpligt för att behandla små oscillationer runt det stabila jämviktsläget. Isället kan man använda

$$z = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = -c + \frac{c}{2a^2}x^2 + \frac{c}{2b^2}y^2 + \ldots$$

I en linearising får man då

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \ ,$$
$$V = \frac{1}{2}mgc(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) \ .$$

Man läser av vinkelfrekvenserna för små svängningar:

$$\omega_x^2 = \frac{gc}{a^2} \ ,$$
$$\omega_y^2 = \frac{gc}{b^2} \ .$$