Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521
Måndagen 16 augusti 2021, 8.30-13.30 (inklusive tid för skanning och inlämning)
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, Piazza (eller zoom).

Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 20 poäng. Gränser för betyg 4 och 5 är 30 resp. 40 poäng.

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Lycka till!

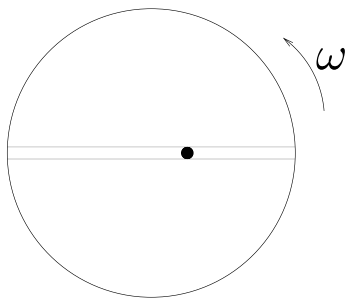
---

1. I ett inertialsystem **S** händer följande: En buss kör med den konstanta farten $v = 14$ m/s på en rak horisontell väg. Det faller regndroppar med farten 10 m/s. Regnets vertikala hastighet är 8 m/s. Dess horisontella hastighet är riktad i bussens rörelseriktning. Bredvid vägen står vertikala telefonstolpar.

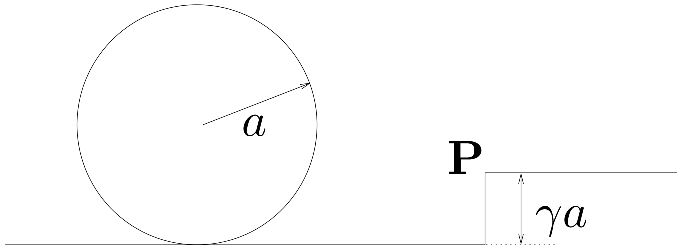
   a. I ett inertialsystem $\mathbf{S}_B$ där bussen är i vila, hur stor är vinkeln mellan bussens framåtriktning och regnets hastighet?

   b. I ett inertialsystem $\mathbf{S}_R$ där regnet är i vila, hur stor är vinkeln mellan telefonstolparna och vägen?

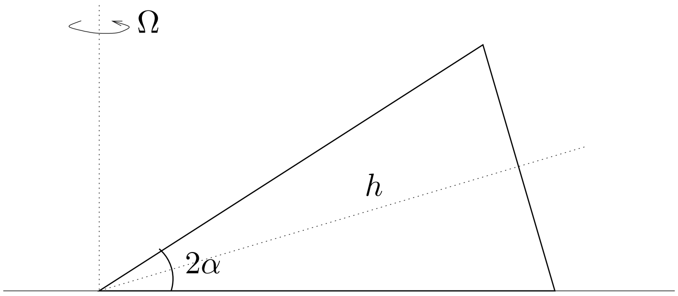
2. En liten kula med massan m kan glida utan friktion i ett rakt spår i en horisontell skiva. Skivan roterar med konstant vinkelhastighet ω runt en axel vinkelrät mot skivans plan. Spåret går genom skivans rotationsaxel. Bestäm kulans läge i spåret som funktion av tiden, om den vid $t = 0$ befinner sig vid rotationsaxeln och har farten v_0. Vilken kraft $\vec{F}$ är det som accelererar kulan (i ett inertialsystem)? Verifiera att dess effekt $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ under rörelsen är positiv (alltså: visa att skalärprodukten $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0$, det räcker inte att observera att partikelns fart ökar). (Det precisa uttrycket behöver inte ges.)



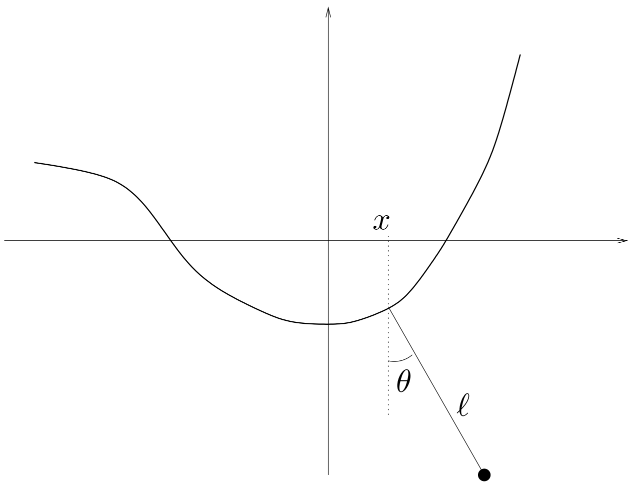
3. En homogen boll med massa m och radie a rullar utan glidning på ett horisontellt plan. Det träffar ett "steg", se figuren. Stegets höjd är γa, $0 < \gamma < 1$. Stöten mot steget går till så att bollen under stöten inte glider i punkten **P**, så att rörelsen omedelbart efter stöten är ren rotationsrörelse runt **P**. För vilket värde på γ når bollen högst höjd i den efterföljande rörelsen?



4. En homogen cirkulär kon med massa m, höjd h och öppningsvinkel 2α rullar på ett horisontellt bord med precessionshastigheten Ω. (Det är en homogen kropp begränsad av den koniska ytan och ett cirkulärt lock.) Vilket totalt vridande moment runt konens spets (från tyngd- och kontaktkrafter tillsammans) krävs för rörelsen? (Eventuella uträkningar av tröghetsmoment skall redovisas. Färdiga samband mellan rotationshastigheter, vinklar m.m. vid precessionsrörelse får inte användas.)



5. En pendel består av en punktmassa m fäst i en lätt tråd med längd ℓ. Trådens andra ände kan glida friktionsfritt längs kurvan $z = f(x)$, där x-axeln är horisontell och z-axeln vertikal, och f är en funktion som har ett lokalt minimum i $x = 0$. Skriv upp Lagrangianen för detta system (utan approximationer) med x och θ enligt figuren som generaliserade koordinater. Lös Lagranges ekvationer för små rörelser kring det stabila jämviktslget.



Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Måndagen 16 augusti 2021
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

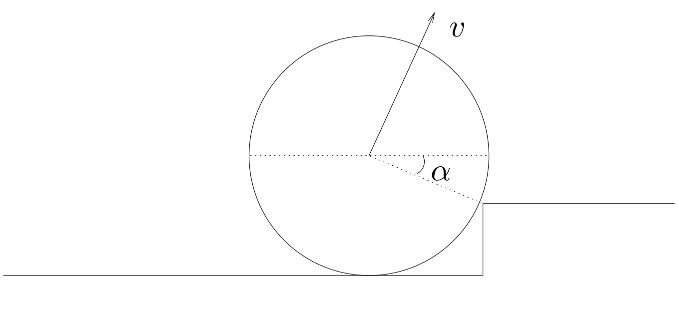
1. Enligt Galileitransformationen ges koordinaterna $\vec{r}'$ i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$ av $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, där $\vec{u}$ är hastigheten för $\mathbf{S}'$ i $\mathbf{S}$. Derivation ger relationen mellan hastigheter: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Låt $\hat{x}$ vara riktad "framåt" och $\hat{y}$ uppåt.

   a. Regnet har hastigheten $\vec{v} = (6\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s. Med $\vec{u} = 14\hat{x}$ m/s fås regnets hastighet i buss-systemet som $\vec{v}_{\mathbf{B}} = (-8\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s, som bildar vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ med $\hat{x}$.

   b. Vid en given tid t är (med beteckningar ovan) $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$. Vinkeln är $\frac{\pi}{2}$.

2. Inför en koordinat ξ längs skåran. Corioliskraften verkar vinkelrätt mot $\hat{\xi}$, och påverkar inte rörelsen. Centrifugalkraften är $\vec{F}_c = m\xi\omega^2\hat{\xi}$. Rörelseekvationen blir $m\ddot{\xi} = m\omega^2\xi$. Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoren är
$$\xi(t) = \frac{v_0}{\omega}\sinh\omega t\ .$$
Det finns endast en (inte fiktiv) kraft som påverkar kulan, normalkraften från spåret (som åstadkommer Coriolisaccelerationen). Coriolisaccelerationen är riktad åt vänster under rörelsen, i positiv vinkelled, så effekten $P = \vec{N}\cdot\vec{v} = \vec{N}\cdot\xi\omega\hat{\theta}$ är positiv. (Konkret: $N = 2m\omega\dot{\xi} = 2m\omega v_0\cosh\omega t$. Dess effekt är $P = N\omega\xi = 2m\omega v_0^2\sinh\omega t\cosh\omega t$. Integration från 0 till t ger arbetet $W(t) = \int_0^t P(t')dt' = mv_0^2\sinh^2\omega t$. Jämför med skillnaden i kinetisk energi T. Vid tiden t är den
$$T(t) = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + (\omega\xi)^2) = \frac{1}{2}mv_0^2(\cosh^2\omega t + \sinh^2\omega t) = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + 2\sinh^2\omega t)\ ,$$
och det stämmer att $T(t) - T(0) = W(t)$.

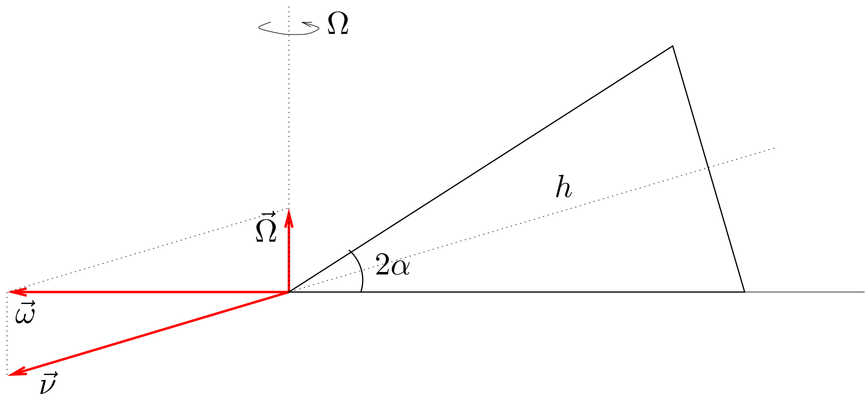
3. Rörelsemängsmomentet runt $\mathbf{P}$ är bevarat. Före stöten är det $L_{\mathbf{P}} = mv_0(1-\gamma)a + \frac{2}{5}ma^2\frac{v_0}{a} = (\frac{7}{5}-\gamma)mv_0a$, där v_0 är bollens fart före stöten. Bollens rotationhastighet ω runt $\mathbf{P}$ omedelbart efter stöten fås då enligt $\frac{7}{5}ma^2\omega = (\frac{7}{5}-\gamma)mv_0a$, dvs. $\omega = (1-\frac{5\gamma}{7})\frac{v_0}{a}$. Masscentrums fart är $v = (1-\frac{5\gamma}{7})v_0$. Man vill maximera vertikalkomponenten av hastigheten omedelbart efter stöten. Den är $v_z = v\cos\alpha$, där $\sin\alpha = 1-\gamma$, dvs.
$$v_z = v_0(1-\frac{5\gamma}{7})\sqrt{\gamma(2-\gamma)}\ .$$
Denna funktion av γ skall maximeras i intervallet $0 < \gamma < 1$. Standardförfarande ger att maximum fås för $\gamma = \frac{11-\sqrt{51}}{10} \approx 0.386$.



4. Inför ett koordinatsystem med origo i konens spets och z-axeln längs konens symmetriaxel. Skiva konen i cirkelskivor för varje z, med radien $r(z) = z\tan\alpha$. En sådan skiva har arean $A(z) = \pi z^2 \tan^2\alpha$. Konens volym är $V = \int_0^h A(z)dz = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$, och dess densitet $\varrho = 3m/(\pi h^3 \tan^2\alpha)$. Massan för en cirkelskiva med tjockleken dz är $dm = \varrho A(z)dz = \frac{3m}{h^3}z^2 dz$. Dess tröghetsmoment m.a.p. spetsen blir $dI_{zz} = \frac{1}{2}dm(r(z))^2$, och (m.h.a. Steiner) $dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{1}{4}dm(r(z))^2 + dmz^2$. Integration över z ger

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{5}mh^2(1 + \frac{1}{4}\tan^2\alpha) \; ,$$
$$I_{zz} = \frac{3}{10}mh^2\tan^2\alpha \; .$$

För att beräkna momentet som påverkar konen under rörelsen behöver man $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{L}$. För att beräkna $\vec{L}$ behöver rotationsvektorn delas upp i spinn ($\vec{\nu}$) och precession ($\vec{\Omega}$, som är given). Eftersom linjen där konen är i kontakt med underlaget är i vila, måste $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu}$ vara horisontell, och man får denna bild:



Man har alltså $\nu = \frac{\Omega}{\sin\alpha}$. Låt x-axeln peka snett uppåt vänster i figuren och y-axeln ut ur pappret. Då kan man skriva $\vec{\omega}$ i termer av de kroppsegna koordinaterna som

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\nu} = \Omega\cos\alpha\hat{x} + \Omega\sin\alpha\hat{z} - \frac{\Omega}{\sin\alpha}\hat{z} \; .$$

Rörelsemängdsmomentet blir

$$\vec{L} = \frac{3}{5}mh^2\Omega(1 + \frac{1}{4}\tan^2\alpha)\cos\alpha\hat{x} - \frac{3}{10}mh^2\Omega\sin\alpha\hat{z} \; .$$

Nu kan man använda $\vec{\Omega}\times\hat{x} = \Omega\sin\alpha\hat{y}$, $\vec{\Omega}\times\hat{z} = -\Omega\cos\alpha\hat{y}$, för att, efter litet förenkling, få fram det sökta momentet

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega}\times\vec{L} = \frac{3}{20}mh^2\Omega^2\tan\alpha(1 + 5\cos^2\alpha)\hat{y}$$

(går att skriva på litet olika sätt).

5. Använd x och θ som generaliserade koordinater. Massans läge ges som $\vec{r} = (x+a\sin\theta)\hat{x}+(f(x)-a\cos\theta)\hat{z}$, och hastigheten blir $\vec{v} = (\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)\hat{x} + (\dot{x}f'(x) + a\dot{\theta}\sin\theta)\hat{z}$. Lagrangianen är

$$L = T-V = \frac{1}{2}mv^2+mgz = \frac{1}{2}m\left((1+f'^2(x))\dot{x}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}(\cos\theta + f'(x)\sin\theta) + a^2\dot{\theta}^2\right) - mg(f(x)-a\cos\theta)\ .$$

Vill man linearisera för små rörelser kan man lika gärna göra det i Lagrangianen, där man sparar kvadratiska termer. Låt $f(x) \approx f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2$. Bortsett från en konstant blir Lagrangianen till kvadratisk ordning

$$L \approx \frac{1}{2}m\left((\dot{x}+a\dot{\theta})^2 - g(f''(0)x^2 + a\theta^2)\right)\ .$$

Rörelseekvationerna för x och θ blir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{x}+a\dot{\theta}) + f''(0)gx = 0\ ,\\ \frac{d}{dt}(\dot{x}+a\dot{\theta}) + g\theta = 0\ .\end{aligned}$$

Härur syns att $\theta = f''(0)x$. (Detta kan förstås som att pendeln hela tiden håller sig vinkelrät mot kurvan.) Eliminering av θ ger differentialekvationen $(1+af''(0))\ddot{x} + f''(0)gx = 0$, vars lösningar är harmoniska svängningar med vinkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a+\frac{1}{f''(0)}}}\ .$$

Kontroll: Då $f''(0)$ (som är den inversa krökningsradien) blir stor återfås vinkelfrekvensen hos en vanlig pendel. För ändligt $f''(0)$ blir det en vanlig pendel med längd $a+\frac{1}{f''(0)}$, som är det konstanta avståndet till cirkelns mitt.

(Vart tog den andra frihetsgraden vägen? I ljuset av kontrollen ovan är det som att dela upp ett viktlöst snöre i två delar, utan någon massa mellan. Den ytterligare frihetsgraden bär ingen kinetisk energi. Antag att man skulle tvinga systemet att börja i ett läge där $\theta \neq f''(0)x$, vad händer då? För att behandla den frågan måste man införa någon massa för snöret. $\theta = f''(0)x$ av samma anledning som ett snöre med försumbar massa är rakt.)