Tentamen i **Mekanik 2 för F**, FFM521
Torsdagen 3 juni 2021, 8.30-13.30 (inklusive tid för skanning och inlämning)
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, zoom eller Piazza.

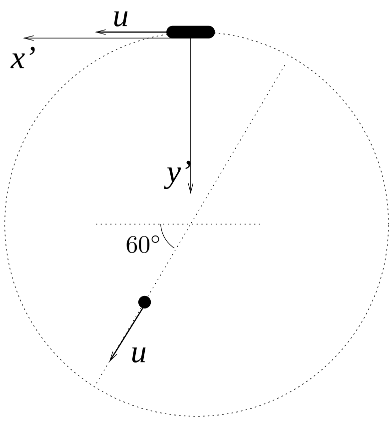
Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. För godkänt (betyg 3) krävs 20 poäng (exklusive bonuspoäng). Gränser för betyg 4 och 5 är 30 resp. 40 poäng (inklusive bonuspoäng).

Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

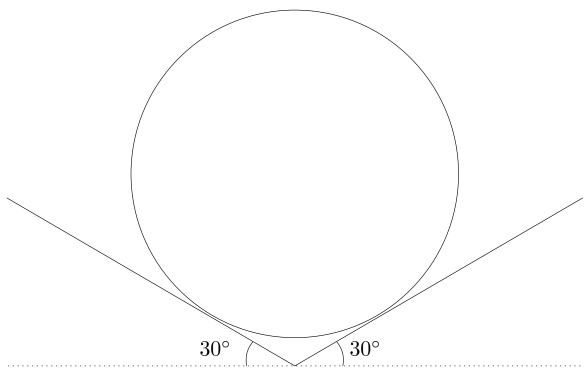
Lycka till!

---

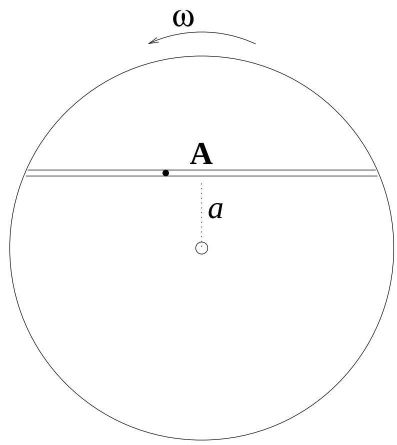
1. En buss kör med konstant fart u i en rondell med radien R. En hund sneddar över rondellen längs en diagonal med den konstanta hastigheten $\vec{u}$, $|\vec{u}| = u$, så att dess hastighet bildar vinkeln $60°$ med bussens färdriktning vid tidpunkten $t = t_0$ när hunden befinner sig på avståndet $R/2$ från rondellens mitt (se figuren). Låt S', med koordinater x', y' enligt figur, vara det inertialsystem i vilket bussen är i vila vid tiden t_0. Vad är vinkeln mellan positiva x'-axeln och hundens hastighet i systemet S'? Vad är hundens acceleration i S'?



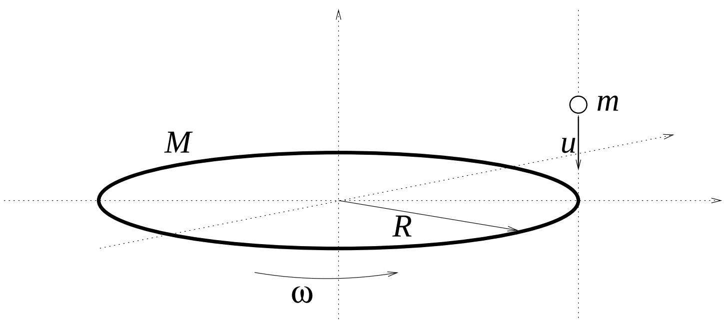
2. En homogen boll med massa m och radie a ligger i en kil med öppningsvinkeln $120°$. I figuren verkar gravitationen nedåt. Den har initialt en rotationshastighet ω_0 kring en axel genom masscentrum som är vinkelrät mot figurens plan. Friktionskoefficienten i kontaktpunkterna är μ. Vad är det största värdet $\mu = \mu_0$ sådant att bollen inte lämnar det avbildade läget? Vilken är den kortaste möjliga tiden som det tar för kulan att upphöra att rotera (givet $\mu \leq \mu_0$)?



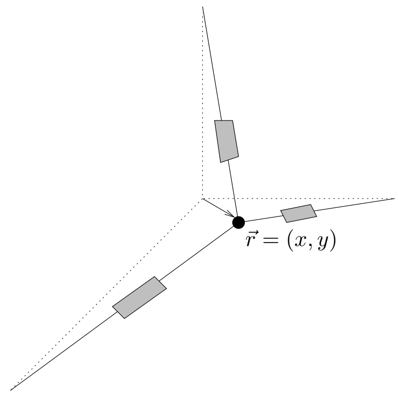
3. En liten kula med massan m kan glida utan friktion i ett spår i en horisontell skiva. Skivan roterar med konstant vinkelhastighet ω runt en axel vinkelrät mot skivans plan. Spårets minsta avstånd till rotationsaxeln är a. Kulan påverkas av en återförande kraft, som är proportionell med proportionalitetskonstant k mot avståndet till punkten **A**, som är den punkt i spåret som är närmast rotationsaxeln. För vilka värden på ω har kulan ett stabilt jämviktsläge i **A**?



4. En rymdstation har formen av en smal cylinder ("ring") med massan M och radien R. Den roterar med vinkelhastigheten ω runt sin symmetriaxel. En liten kropp med massa m rör sig med farten u parallellt med rymdstationens symmetriaxel på avståndet R från axeln (se figur). Den krockar med rymdstationen och fastnar på den. Bestäm rotationsvektorn för den gemensamma rörelsen omedelbart efter stöten.



5. En partikel med massan m är fäst i tre fjädrar, alla med fjäderkonstant k. Fjädrarnas andra ändar är fästa i punkterna $(a, 0)$, $(0, a)$ och $(-a, -a)$ $(a > 0)$, och de har de naturliga längderna a, a resp. $\sqrt{2}a$, så att partikelns jämviktsläge är i origo. Partikeln kan röra sig i xy-planet. Bestäm de möjliga egenfrekvenserna hos detta system för små svängningar kring jämviktsläget, och skriv upp den allmänna lösningen $(x(t), y(t))$ för små svängningar.



Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 3 juni 2021
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Kalla det inertialsystem i vilket uppgiften är formuleras för S. Hundens hastighet $\vec{u}$ i S och $\vec{u}'$ i S' är relaterade enligt $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$, där $\vec{v}$ är hastigheten för S' relativt S. Alltså, $\vec{u}' = u(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - (u, 0) = u(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Vinkeln mot $\hat{x}'$ är $120°$. Accelerationen är 0.

2. Låt rotationen vara medurs. Normal- och friktionskrafter benämns med 1 (vänster kontaktpunkt) och 2 (höger). Kraftjämvikt och momentekvation ger

$$\begin{aligned}\uparrow\colon (N_1 + N_2)\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu(N_2 - N_1)\frac{1}{2} - mg = 0 \ ,\\ \rightarrow\colon (N_1 - N_2)\frac{1}{2} + \mu(N_1 + N_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \ ,\\ I\ddot{\theta} = -\mu(N_1 + N_2)a \ ,\end{aligned}$$

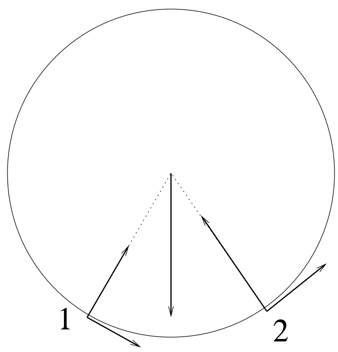
där $I = \frac{2}{5}ma^2$. Lösning av kraftekvationerna ger

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1 - \sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)}mg \ ,\\ N_2 &= \frac{1 + \sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)}mg \ .\end{aligned}$$

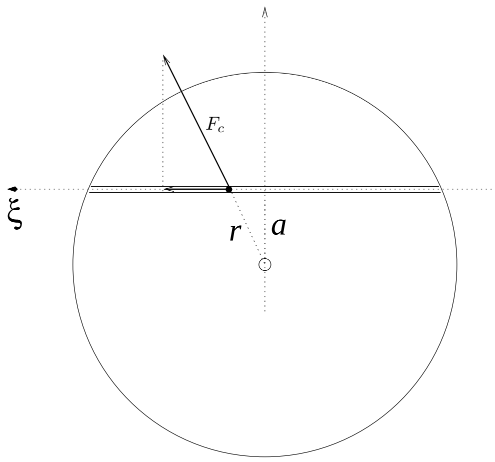
$N_1 \geq 0$ kräver $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Momentekvationen blir

$$\ddot{\theta} = -\frac{5\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)}\frac{g}{a} \ .$$

Tiden från ω_0 till vila är $T(\mu) = \frac{\sqrt{3}(1+\mu^2)}{5\mu}\frac{a\omega_0}{g}$. Denna funktion är monotont avtagande i det aktuella intervallet ($0 < \mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$). Insättning av $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ger $T = \frac{4a\omega_0}{5g}$.



3. Inför en koordinat ξ längs skåran. Corioliskraften är en ren normalkraft, och påverkar inte rörelsen. Centrifugalkraften F_c är ritad i figuren, och $F_c = mr\omega^2$. Kongruens ger $\frac{F_{c,\xi}}{F_c} = \frac{\xi}{r}$, så dess ξ-komponent är $mx\omega^2$. Rörelseekvationen blir $m\ddot{\xi} = (m\omega^2 - k)\xi$, och jämviktsläget $\xi = 0$ är stabilt om $\omega^2 < \frac{k}{m}$. Går också bra att lösa med Lagrange.



4. Koordinatsystem: z uppåt, x åt höger i figuren i uppgiften. Före stöten har rymdstationen rörelsemängdsmomentet $\vec{L}_{\text{ring}} = MR^2\omega\hat{z}$ och den lilla kroppen $\vec{L}_{\text{kropp}} = R\hat{x} \times (-mu\hat{z}) = muR\hat{y}$. Efter stöten är tröghetsmatrisen för den sammansatta kroppen

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 + mR^2 \end{pmatrix}$$

Rörelsemängdsmomentet är bevarat. Den sökta rotationsvektorn $\vec{\omega}'$ skall då uppfylla $I\vec{\omega}' = mvR\hat{y} + MR^2\omega\hat{z}$, vilket ger

$$\vec{\omega}' = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{v}{R}\hat{y} + \frac{M}{M+m}\omega\hat{z}\ .$$

Denna lösning har givit full poäng. Dock är den inte helt korrekt, eftersom masscentrum för den gemensamma kroppen har en translationshastighet efter stöten. Rörelsemängdmomentet m.a.p. mitten är bevarat, men får bidrag från rotation kring masscentrum och masscentrums translation.

5. Potentialen fås genom att skriva förlängningen av fjädrarna, och är

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}k(|\vec{r} - \vec{r}_i| - |\vec{r}_i|)^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}k\left(\sqrt{r^2 - 2\vec{r}_i\cdot\vec{r} + r_i^2} - r_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}kr_i^2\left(\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}_i\cdot\vec{r}}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2}} - 1\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}kr_i^2\left(2 - 2\frac{\vec{r}_i\cdot r}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2} - 2\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}_i\cdot\vec{r}}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2}}\right)\ . \end{aligned}$$

där $\vec{r}_i$ är de tre fästpunkterna. Utveckla för små $\vec{r}$ till andra ordningen m.h.a. $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots$. Efter några kancellationer,

$$V(x,y) \approx \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}k\frac{(\vec{r}_i \cdot \vec{r})^2}{r_i^2} = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+\frac{(x+y)^2}{2}) \ .$$

(Notera rimligheten i att endast förflyttning längs linjen från fästpunkten bidrager.) Det betyder att man har en Lagrangian $L = \frac{1}{2}\dot{X}^t M \dot{X} - \frac{1}{2}X^t K X$, där $X^t = (x,y)$ och

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad K = k\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Rörelseekvationerna är $M\ddot{X}+KX = 0$. Ansatsen $X(t) = Ae^{i\omega t}$ ger den sekulära ekvationen $\det(-M\omega^2 + K) = 0$, med lösningarna $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$, med amplitudvektorerna (proportionella mot) $A_1 = (1,1)^t$ respektive $A_2(1,-1)^t$. Med tanke på systemets symmetri kring $x = y$ verkar detta rimligt. Det är också rimligt att svängningen i riktningen A_1 har högre frekvens än den i riktningen A_2, då alla tre fjädrarna deformeras.

Den allmänna lösningen är

$$X(t) = a_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \ .$$