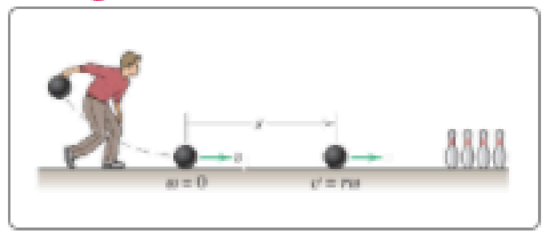
Uppgift 1

Ett bowlingklott kastas iväg. Den träffar banan utan rotation, glider iväg och börjar därefter rotera pg.a. friktion mot banan. Vi antar att klotet har tröghetsmoment $mr^2\kappa$ och friktionskoefficienten mot banan är μ. Gravitation är g och klotets kastas iväg med hastighet v.

Vad blir sträckan s som klotet glider innan den börjar rulla friktionsfritt.

Denna uppgift finns i kursboken som 6/102. Dock är inte svaret där i en form som godtas som lösning.

Obs; utkastet är v, inte v_0 som kan ha förekommit i tidigare version.



Sträckan s som klotet glider.

(in terms of kappa,v,mu,g) [18 attempts]

kappa v^2 / (2 mu g (1 + kappa))

$\frac{\kappa \cdot v^2}{(2 \cdot \mu \cdot g \cdot (1+\kappa))}$ (unchecked)

Bevara RM runt nedslaget. Notera att efter rullning blir $v' = \omega r$ och tröghetsmoment = $\kappa m r^2$.

$$mvr = mv'r + (\kappa m r^2)\omega = mv'r(1+\kappa)$$

Därigenom får vi

$$v' = \frac{v}{\kappa+1}$$

Friktionskraften får vi från $F = \mu m g$ och tiden till v' blir alltså

$$\mu m g t = m(v - v') = mv(1 - \frac{1}{\kappa+1}) = \frac{mv\kappa}{1+\kappa}$$

och vi får därigenom

$$t = \frac{\kappa v}{\mu(1+\kappa)}$$

Avståndet blir

$$s = vt - \frac{1}{2}at^2 = t(v - \frac{v-v'}{2}) = \frac{1}{2}t(v+v') = \frac{1}{2}\frac{\kappa v}{\mu(1+\kappa)}v(1+\frac{1}{1+\kappa})$$

Kommentarer

Det lockar att inventera kinetiska energi förlusten och likställa detta med $m\mu g s$. Kom ihåg att kinetiska energin innehåller också rotationsenergin så : $E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa m v^2$. Denna beräkning ger dock fel svar då formeln $\Delta E = F_f\, s$ bara kan tillämpas på en process där en kropp glider utan att rulla. Denna approach gav alltså fel svar av en anledning som är någorlunda subtil och alla som genomförde uppgiften på detta sätt fick ändå full poäng. En inkorrekt tillämpning av energiprincipen, där man glömmer bort rotationsenergin ger dock korrekt svar. Denna inkorrekta härledning som gav rätt svar från fel princip gav också full poäng. Att det blir rätt svar har att göra med avstånd tillryggalagt under konstant accelleration och har egentligen inget med energi att göra.

För att helt korrekt använda energiprincipen när en kropp både rullar och glider får man tillämpa $\delta E = F \delta s$ där $\delta s = \delta t(v - \omega r)$ är det avstånd som den ena ytan rör sig relativt den andra. Detta kan också härledas om man granskar inverkan av både kraft och vridmoment. $\Delta s = 0$om klotet rullar och $\Delta s = s$ om klotet inte rullar.

Uppgift 2

Ett SJ X200 tågset väger $M = 360ton$ Låt oss anta att den kör $v = 240km/t$ på en viss raksträcka från Göteborg till Stockhom, en latitud mycket nära $\theta = 60^{\circ}$ i riktning nordost $\phi = 40^{\circ}$ på ett spår som är perfekt horisontellt med avseende på en vertikal lodlinje. Lodlinjen är "rakt ner" dvs riktningen av summan av tyngdkraften och centrifugalkraften och i linje med ett snöre med en hängande vikt. Vad blir magnituden på sidokraften på rälsen när tåget har den angivna rörelsen.

I första delupgiften, svara i termer relevanta variabler ur θ , ϕ, M, g , Ω. *Det är särskilt viktigt att en egen redovisning bifogas då det är möjligt att svaret går att hitta någonstans på nätet.*

I andra deluppgiften, ge ett numerisk svar i Newton för $|\Omega| = \frac{2\pi}{86400}[\frac{1}{sec}]$, jordens vinkelhastighet och uppskatta värdet i Newton med de angivna värdena. Använd $g = 10meter/second^2$ så kan man återge ett exakt svar utan miniräknare.

Sista deluppgift ger 1p under förutsättning att en korrekt redovining av svarsalternativet bifogas.

$|F_{\perp}|$

(in terms of m,v,Omega (Ω),theta,g,phi (ϕ)) [9 attempts]

2 m v Omega sin(theta)

$2 \cdot m \cdot v \cdot \Omega \cdot \sin(\theta)$ (unchecked)

A A A

Lösning

Enklaste sättet är att upprätta ett kordinat system där $\hat{x}$ är i tågets riktning, $\hat{z}$ är vertikalt och $\hat{y}$ är vinkelrätt mot spåret.

Vi har då Coriolis kraftens komponent y-led F_c i y-led:

$$(F_c)_y = -2mv\,\hat{y}\ \cdot (\vec{\Omega} \times \hat{x})$$

vilket ger $-2\Omega_z mv$.

Den lokala vertikala komponenten Ω_z får vi från

$$|\Omega|\ \hat{Z} \cdot \hat{z} = \Omega \sin\theta$$

Slutsvar blir alltså

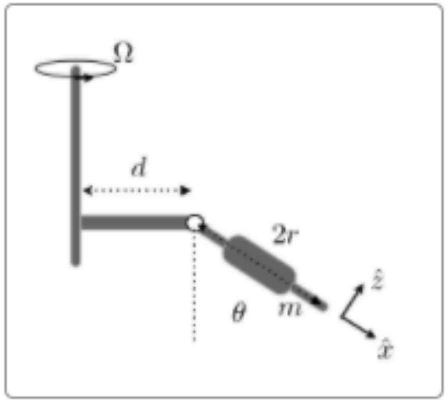
$$|F_c| = 2m\Omega v \sin\theta$$

utan beroende på vare sig g eller ϕ

I detta fall får vi $\frac{5000\,\pi}{3\sqrt{3}} N = 3023.0\ N$ motsvarnde $302\ kg$. Det är alltså lite mindre än en tusendel av gravitationskraften.

Knepigt blir alltid att få rätt riktning på kraften. Norra halvklotet vrids alltid rörelse åt höger. Alltså trycker rälsen tåget åt vänster och kraften på rälsen blir till höger. Delpoäng enbart för rätt svar och korrekt redovisning.

Uppgift 3



En symmetrisk kropp är fäst i en horisontell pinne av längd 'd' och svänger fritt runt runt fästpunkten enligt figure. Pinnen är fäst i en vertikal axel som roterar med vinkelhastighet ω. Kroppen observeras uppta en vinkel θ med det horisontella. Om vi definierar $\hat{x}$ som symmetriaxeln riktning är tröghetsmomentet av kroppen runt dess masscentrum $I_x = mr^2\kappa_1$ $I_y = I_z = \kappa_3 mr^2$ Massan på kroppen är m.

Denna uppgift är uppenbarligen lik slänggungan i Kapitel 6a samt en uppgift på förra tentan. Att upprepa dessa resultat utan generalisering till detta fall ger inga delpoäng.

Beräkna Lagrangian $\mathscr{L}$, Lagrange ekvationen för θ. Under förutsättning att θ är konstant vinkel, beräkna Ω i termer av θ, g, κ_1 och κ_3.

Kinetiska energi av mass centrum :

$$T_0 = \frac{1}{2}\left((d + r\sin\theta)^2\Omega^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

I kropps koordinaten pg.a rotation runt mass centrum har vi, då $\omega = [\Omega\sin\theta, \dot{\theta}, \Omega\cos\theta]$ och $T_1 = \frac{1}{2}\omega\cdot I\cdot\omega$

$$T_1 = \frac{1}{2}mr^2((\Omega\sin\theta)^2k_1 + \dot{\theta}^2k_3 + (\Omega\cos\theta)^2k_3)$$

Lägesenergi = - mgr cos θ Det ger

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\left(\Omega^2\left(d^2 + 2dr\sin(\theta) + (k_3+1)r^2\sin^2(\theta)\right) + 2gr\cos(\theta) + k_1\Omega^2r^2\cos^2(\theta) + (k_3+1)r^2\dot{\theta}^2\right)$$

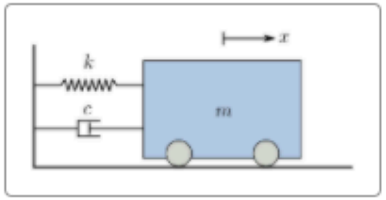
Och Lagrange ekvationerna

$$\ddot{\theta} = \frac{\Omega^2\cos(\theta)(d + r(-k_1+k_3+1)\sin(\theta)) - g\sin(\theta)}{(k_3+1)r}$$

Vi sätter $\ddot{\theta} = 0$ i ovan och får villkoret

$$\Omega^2 = \frac{g\tan(\theta)}{d + r(-k_1+k_3+1)\sin(\theta)}$$

Uppgift 4



Del A

En kritiskt dämpad oscillator är i vila. Den ges en initialhastighet v_0 och uppnår en maximal amplitud x_m vid tiden t_m . Beräkna värdet på $\frac{x(t)}{x_m}$ för $t = nt_m$ enbart i termer av n . Kontrollera att ditt svar är korrekt för $n = 1$.

Ni ska skissera lösningarna. Slösa inte din tid på dator eller miniräknare; frihand går bra. Endast egenskaperna som förekomst av nollvärden av läge eller hastighet är väsentliga. Ange var t_m finns på tidsaxeln i vardera graf.

Rita en ungefärlig bild av $x(t)$.

$x(nt_m)/x_m$

(in terms of n) [9 attempts]

n exp(1-n)

$n \cdot exp(1 - n)$ (unchecked)

A A A

Del B

Samma oscillator släpps nu från vila vid $x = x_0$. Bestäm $x(t)/x_0$ efter en tid $t = nt_m$ där t_m tas från Del A.

Rita en ungefärlig bild av $x(t)$.

$x(n\,t_m)/x_0$

(in terms of n) [6 attempts]

(1 + n) e^(-n)

$(1 + n) \cdot e^{(-n)}$ (unchecked)

A A A

Del C

Samma oscillator har nu ett initialvärde av hastighet och läge x_0 så den når $x = 0$ vid $t = t_m$. Vad är dess initialhastighet endast i termer av x_0 och t_m från Del A.

Rita en ungefärlig bild av $x(t)$.

v_0

(in terms of x0 (v_0),tm (t_m)) [6 attempts] ?

- 2 x0 / tm

$\frac{-2 \cdot v_0}{t_m}$ (unchecked)

A A A

Uppgiften löses genom att antingen härleda eller slå upp att för en kritisk dämpad oscillator:

$$x(t) = (a + bt)e^{-\omega t}$$

Del A

Randvilloret är $a = 0$. Max värdet inträffar när $b - b\omega t_m = 0$ dvs $t_m = 1/\omega$. Därigenom får vi x/x_m vid $t = nt_m$

$$ne^{1-n}$$

Del B

Om den släpps i vila får vi diffrentiera x och sätta till noll:

$$x'(t = 0) = b - a\omega = 0$$

Vi ser också att $a = x_0$ så

$$x(t) = x_0(1 + \omega t)e^{-\omega t}$$

Insättande av $t = n/\omega$ ger x/x_0 som

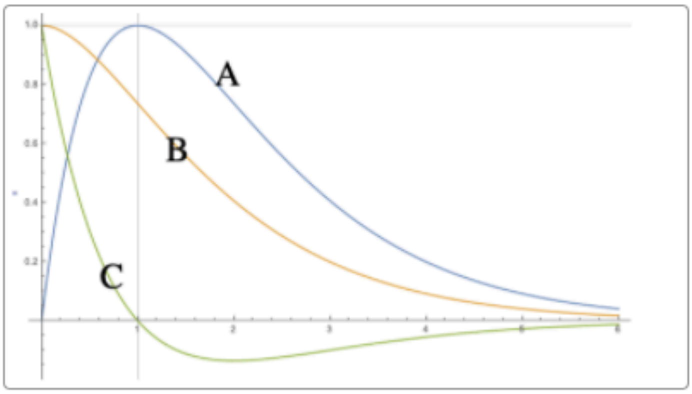
$$(1 + n)e^{-n}$$

Del C

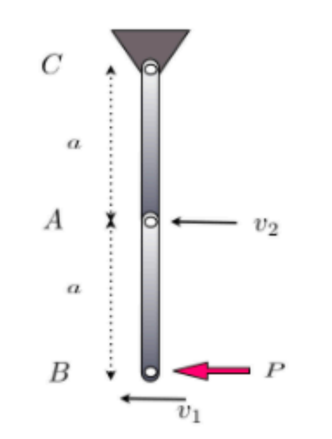
Vi har $x = (a + bt)e^{-\omega t}$ och begär $a = x_0$ och $a + b/\omega = 0$. Alltså $x = x_0(1 - \omega t)e^{-\omega t}$. Vi har $v_0 = x'(t = 0) = -2\omega x_0$ vilket ger

$$v_0 = -2x_0/t_m$$

Notera att en kritisk dämpad oscillator kan ha max ett nollvärde $t = -a/b$ och då när a och detta för positivt t när a och b har motsatta tecken.



Uppgift 5



Två stavar var och en av längd a är friktionsfritt länkade enligt figure. Båda hänger i vila då den nedre staven utsätts för en impuls P till höger. Beräkna den resulterande vinkelhastigheten av den övre staven precis efter stöten. Positivt är medurs. Stavarna har tröghetsmoment $\frac{1}{12}ma^2$ runt deras masscentrum.

Beteckna v_1 hastigheten vid punkt B och v_2 hastigheten vid punkt A precis efter stöten. Skriv ner de två ekvationer som v_1 och v_2 måste uppfylla precis efter stöten. Beräkna v_2 vid stöten i termer av P och m. Positivt i pilens riktning.

Tips: denna uppgift är svårare än den ser ut. Jobba med denna när de andra är klara

(Uppgiften liknar 6.220 i MK v7 va). Dock är lösningen inte till någon hjälp på denna tenta. Vi har totala RM bevaring av den nedre staven runt A. Första termen är rotation runt masscentrum, andra termen rotation runt mass centrum. Faktor $\frac{1}{4}$ pg.a. masscentrum hastighet = $(v1 + v2)/2$ och den rör sig på ett avstånd $a/2$ från A. Tröghetsmomentet $i = \frac{1}{12}ml^2$.

Obs $p = P$ i lösningen

$$ap = i\frac{v_1 - v_2}{a} + ma\frac{v_1 + v_2}{4}$$

Sedan har vi också RMM bevarat runt C

$$2ap = i\frac{v_1 - v_2}{a} + i\frac{v_2}{a} + \frac{amv_2}{4} + \frac{3am(v_1 + v_2)}{4}$$

Insättandet av $i = \frac{1}{12}ma^2$ och multiplicera höger och vänsterled med 6 ger samt dela med a, efter förenkling:

$$6p = m(2v_1 + v_2)$$

och

$$12p = m(5v_1 + 6v_2)$$

Vi löser dessa ekvationer för v_1 och v_2 och får

$$v_1 = \frac{24p}{7m}$$

och

$$v_2 = \frac{-6p}{7m}$$

Vi finner alltså att v_2 är i motsatta riktning til P. Lite intressant; det beror på rekylen vid läget A hos AB som är i motsatta riktning till P.

Ni har alltså två variabler v_1 och v_2 som ska lösas från två ekvationer som också innehåller p och givevis m och a . I den första uppgiften ska ni skriva ner de två ekvationer som skall lösas.