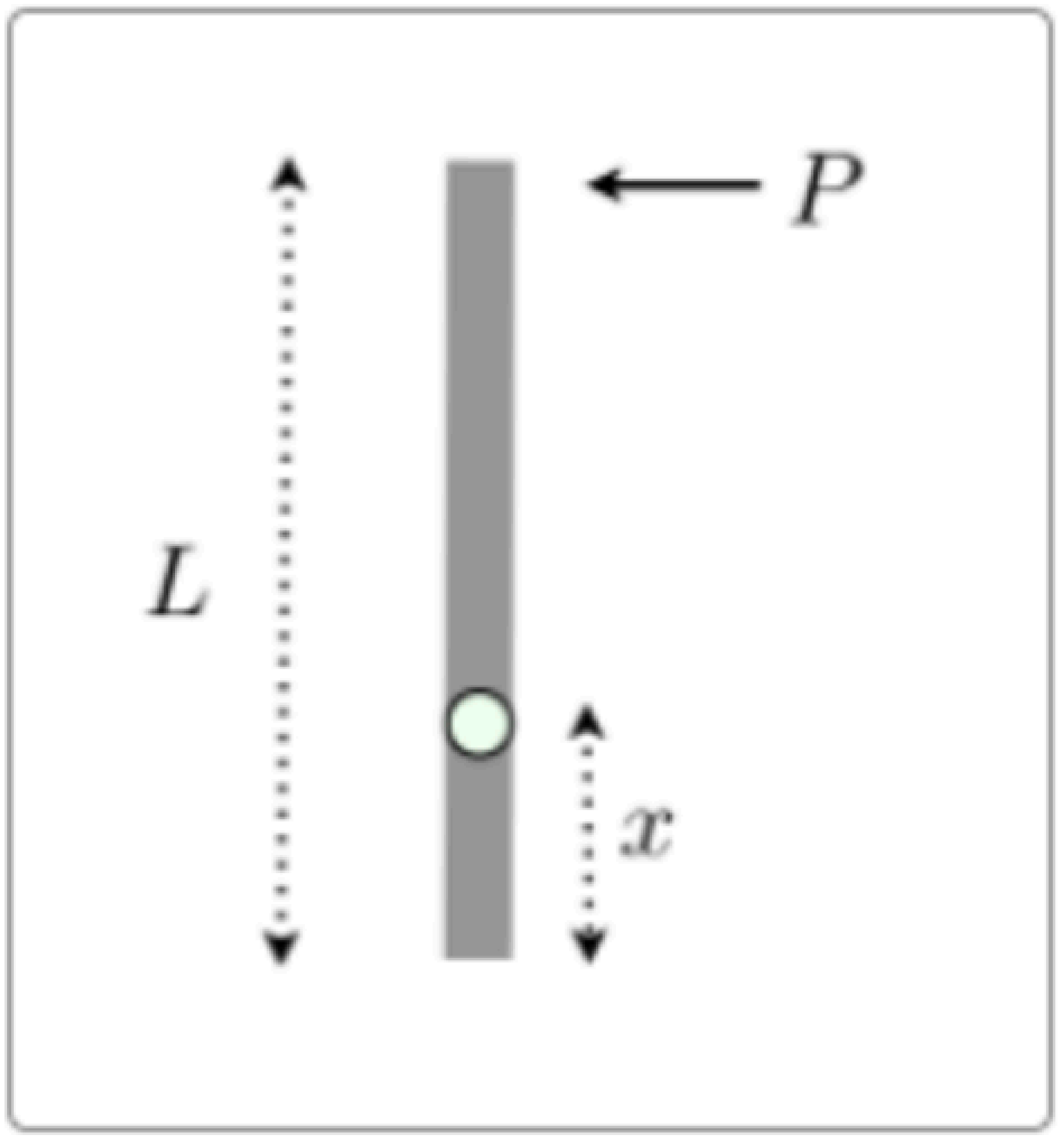
Uppgift 1

En tunn rät stav med längd L är i vila och kan rotera friktionsfritt runt en axel belägen x från ena änden. Staven utsätts för en impuls P vinkelrätt mot stavens längd och vid den motsatta änden. Vad skall x vara så att inga stötkrafter uppstår vid axeln. *Ett korrekt men omotiverat svar ger noll poäng.*



x

(i termer av L)

A A A

RMM runt x är bevarat

$$p(L-x) = \frac{1}{12}mL^2\omega + (\frac{L}{2} - x)^2\omega m$$

Rörelsemängd bevarad; eftersom punkten x är stationär under stöten och enligt antagande inga stötkrafter uppstår.

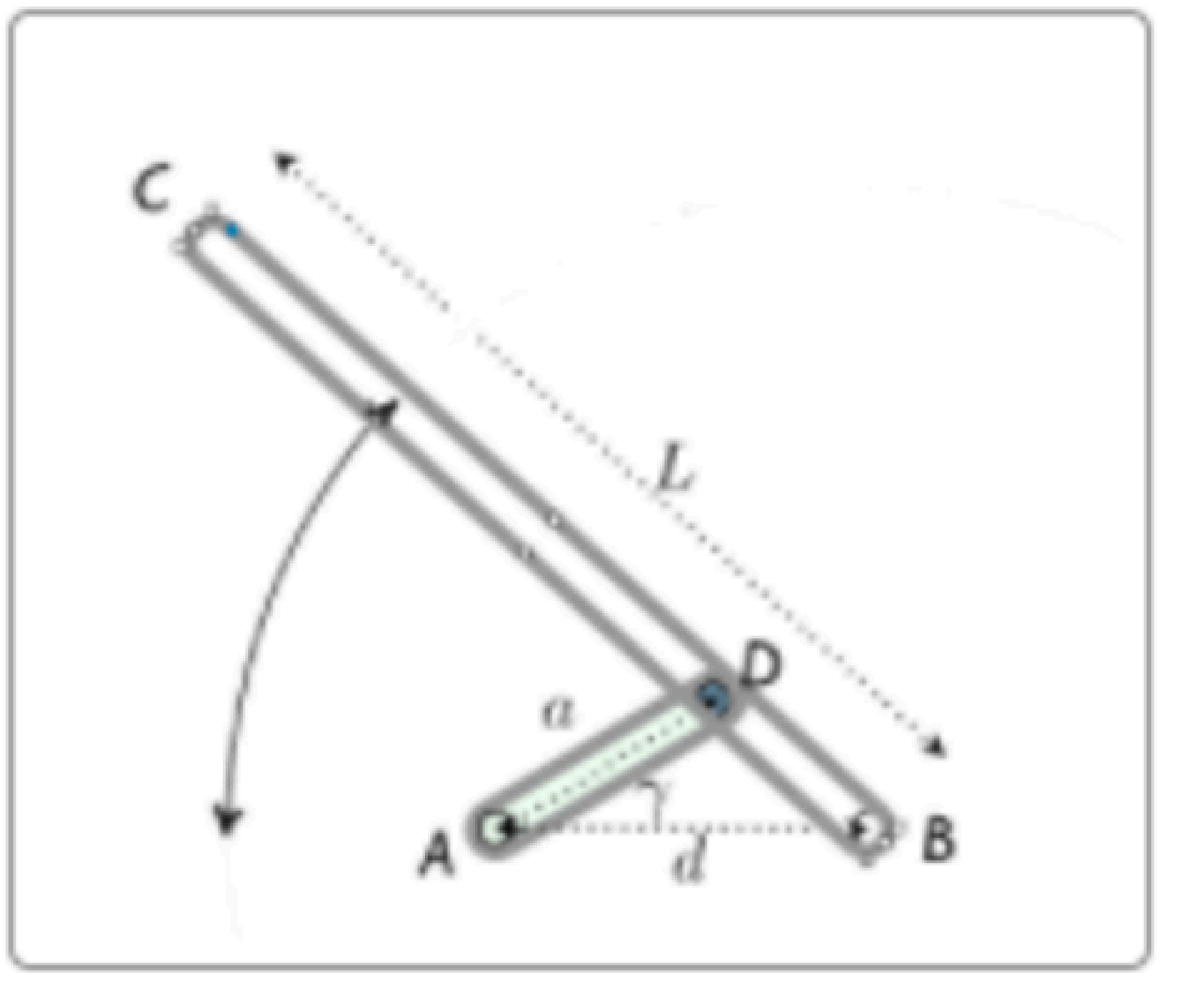
$$p = (\frac{L}{2} - x)\omega m$$

Vi ersätter för p i första ekvationer och löser för x:

$$x = L/3$$

Uppgift2

Två länkar är sammankopplade enligt figuren. Länken AD roterar runt A med en vinkel som beror på tiden som $\gamma(t)$. Den långa skårade länken BC rotera runt B och drivs av en sprint som sitter fast i ändan på länken AD och löper is skåran. Beräkna hastigheten $|v_C|$ av punkten C i termer av $\dot{\gamma}$, a, d och L.



Använd trig ettan för att bli av med termer som innehåller $\cos^2$ eller $\sin^2$. Inga kvadratrötter eller inverse trig funktioner bör förekomma i svaret. γ är vinkeln mellan AD och AB. Den stora pilen visar bara rörelsen.

$|v_C|$

(i termer av d, a, L, gamma (γ), gammadot ($\dot{\gamma}$))

Låt ω vara vinkelhastigheten av BC, och $r = r_{BD}$. Plan: Vi kan uttrycka hastigheten $\vec{v_D}$ på två olika sätt (utifrån de två länkarna) för att hitta ω. För att förenkla ytterligare något, kan vi istället titta på $\vec{r} \times \vec{v_D}$.

$$r^2\omega = |\vec{r} \times \vec{v_D}| =$$

$$r^2\omega = |(a\cos(\gamma) - d)\ \hat{x} + a\sin(\gamma)\ \hat{y}\ ) \times (-a\dot{\gamma}\sin(\gamma)\hat{x} + a\dot{\gamma}\cos(\gamma)\hat{y})|$$

vilket ger

$$\omega r^2 = a\dot{\gamma}(a - d\cos\gamma)$$

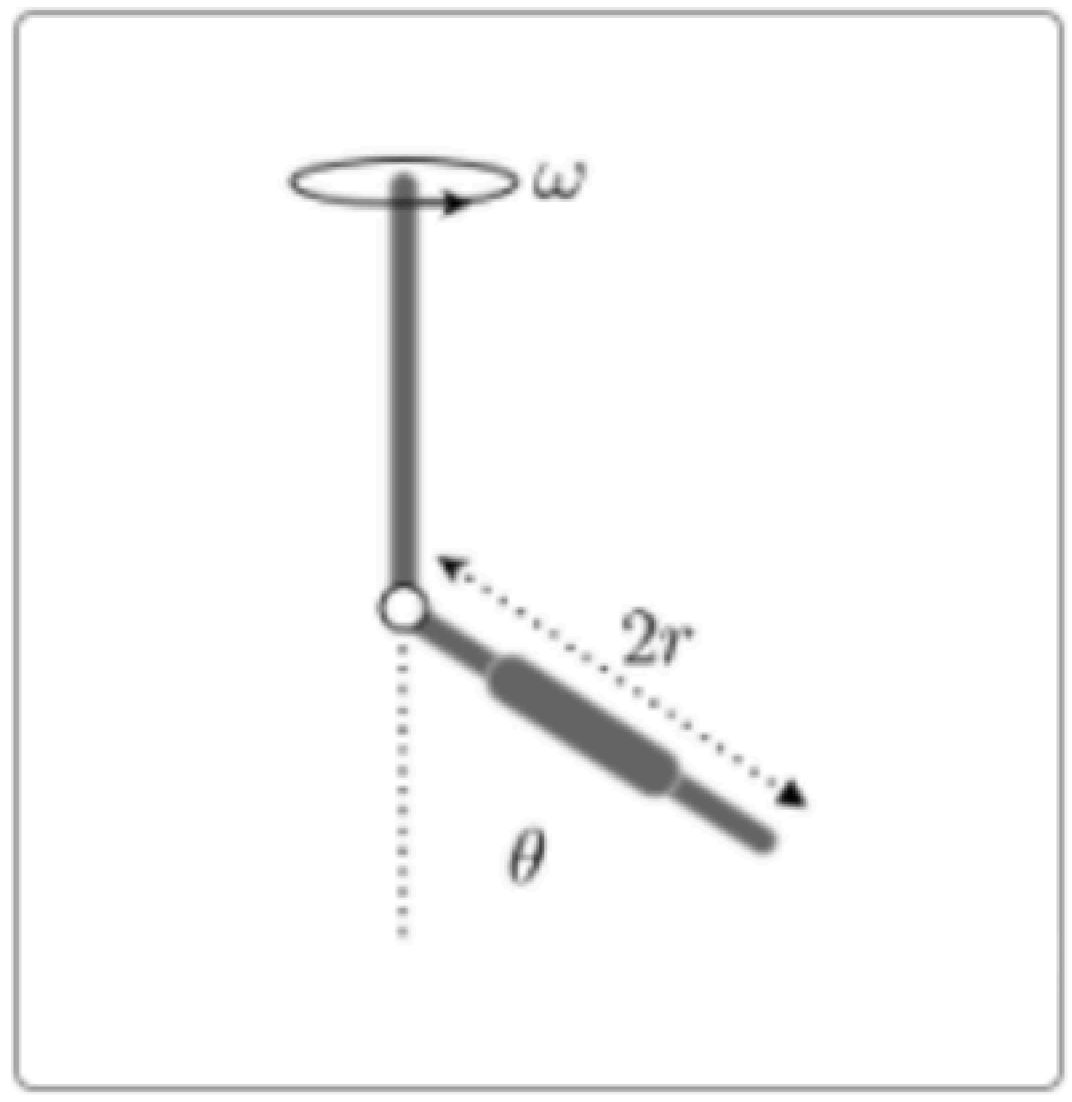
Det är lätt att räkna fram

$$r^2 = (d^2 + a^2 - 2ad\cos(\gamma))$$

Vi har $v_C = \omega\, L$ vilket ger

$$v_C = \frac{aL\dot{\gamma}(a - d\cos\gamma)}{(d^2 + a^2 - 2ad\cos(\gamma))}$$

Uppgift 3



En tunn stav av massa m har ojämnt fördelad massa så att tröghetsmomentet, istället för att vara $\frac{1}{3}mr^2$ runt mass centrum är istället κmr^2. Mass centrum är fortfarande vid halva längden dvs vid r. |

Staven är upphängd i ena ändan och roterar friktionsfritt runt upphängningspunkten, som i sin tur är fäst i en axel som roterar runt vertikal axeln med vinkelhastighet ω. Beräkna $\cos\theta$ från vertikalläge som staven upptar i stationärt läge, under förutsättning att vinkelhastigeheten är tillräckligt stort för att staven ska lyfta från vertikalläge.

Vinkelhastigheten är konstant ω. Notera faktorn $1/3$ inte $1/12$ förekommer i stavens tröghetsmoment eftersom r används i uppgiften, inte L.

Tips Svaret för en tunn stav med jämn massfördeling blir $\frac{3g}{4\omega^2 r}$. *För poäng krävs en redovisning.*

$\cos\theta$

(i termer av g,omega,r,kappa) [0 försök]

I stavens koordinater:

$$\vec{\omega} = \omega(-\hat{x}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta)$$

Med Steiners sats har vi $I_x = 0$, $I_z = (1+\kappa)mr^2$ och får därigenom

$$\vec{H} = \omega mr^2(1+\kappa)\sin\theta\,\hat{z}$$

Moment från gravitation skall vara lika med $\vec{\omega}\times\vec{H}$ vilket ger

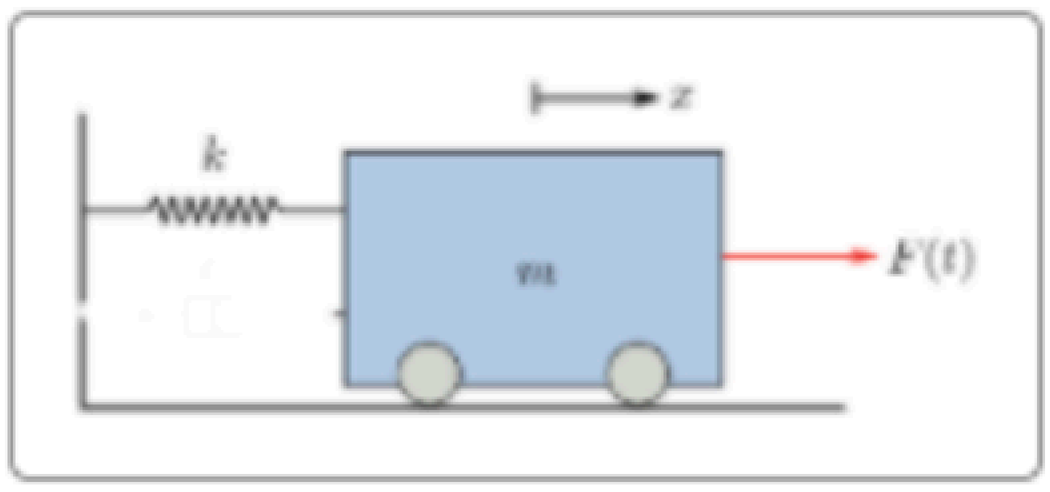
$$mgr\sin\theta\,\hat{y} = \omega^2 mr^2(1+\kappa)\sin\theta\cos\theta$$

Detta löses för $\cos\theta$ och ger

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r(1+\kappa)}$$

Uppgift 4

En massa m är kopplad med en fjäder med fjäderkonstant k. Den är i vila vid $t = 0$. Den utsätts då för en kraft $F(t) = ae^{-\gamma t}$ där γ är reelt och massan rör sig. Vad blir svängningsamplituden efter en lång tid dvs i gränsen $t \to \infty$. Svar i termer av m, $\omega = \sqrt{k/m}$, γ och a.



Tips: Kontrollera att svaret är korrekt i gränsen $\gamma \to 0$.

amplituden när $t \to \infty$

(i termer av a, m, omega, gamma)

A A A

Diffekvationen ger

$$m\ddot{x} + kx = ae^{-\gamma t}$$

Detta ser ut som en vanlig driven oscillator, men med en reel exponent istället i drivtermen istället för en imaginär. Och samma princip gäller att hitta en partikularlösning genom att utnyttja exponentialformen

$$x = be^{-\gamma t}$$

Om vi ansätter får vi

$$(m\gamma^2 + k)b = a$$

Tillsammans med lösningar till den homogena ekvationen där $a = 0$ har vi den allmäna lösningen

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{a}{m\gamma^2 + k}e^{-\gamma t}$$

I det som vi har analyserat oftast, när svängningarna är dämpade och den pålagda kraften oscillerar, saknar initialvillkoret betydelse. I detta fall är det motsatta; initialvillkoret är viktigt det är den tillförda kraften som försvinner.

Initialvillkor ger

$$0 = x(0) = A + \frac{a}{m\gamma^2 + k}$$

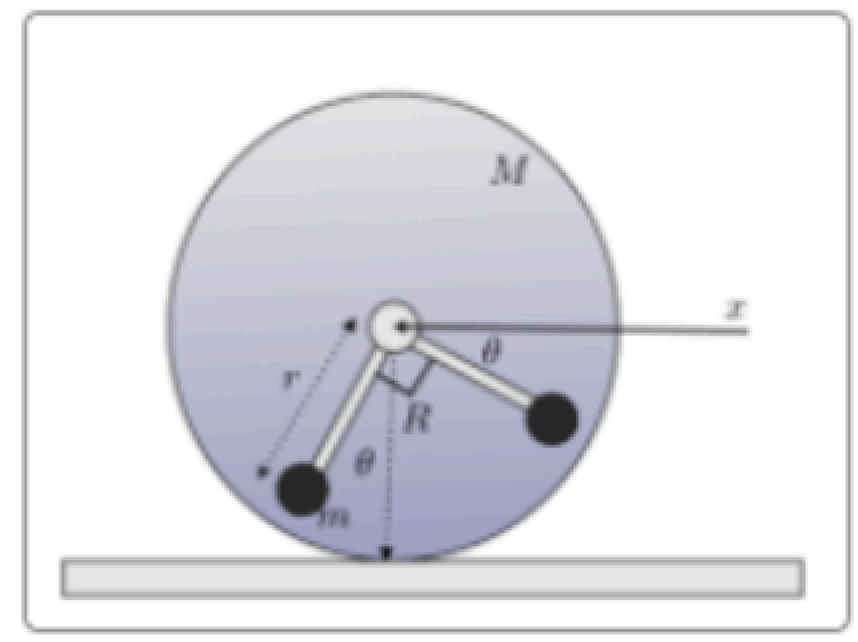
och

$$0 = \dot{x}(0) = \omega B - \frac{a\gamma}{m\gamma^2 + k}$$

Vi löser ut A och B och beräknar den slutgiltiga amplituden när exponentialtermen är noll som

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a}{m\gamma^2 + k}\sqrt{1 + \gamma^2/\omega^2}$$

Uppgift 5



Två skivor med totala massa M och radie R rullar utan att glida på ett platt underlag. Den liknar alltså en yoyo. Tröghetsmomentet av skivorna är tillsammans $\frac{1}{2}MR^2$. Skivorna är sammankopplade med en tunn och masslös axel, varpå hänger två massor var och en med massa m på varsin masslösa stav som har längd r. Stavarna är fixerade vinkelrätt med varandra och svänger tillsammans friktionsfritt runt axeln.

Beteckna x läget av skivans mittpunkt längs underlaget, och θ, vinkeln från vertikalt av massan m. Låt oss nu antaga att släpps från vila från läget $\theta = 0$ och $x = 0$ medan skivorna är i vila. Skivorna rullar nu fram och tillbaka. Beräkna vad x blir innan skivan vänder.

Svaret beror ej på R

Valfri metod får användas, men Lagrangian metod blir nog enklast.

$|\Delta x|$

(i termer av m, M, r) ?

A A A

$$KE_{skivor} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$KE_1 = \frac{1}{2}m\left((\dot{x} - \dot{\theta}r\cos\theta)^2 + (\dot{\theta}r\sin\theta)^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$KE_2 = \frac{1}{2}m\left((\dot{x} - \dot{\theta}r\sin\theta)^2 + (\dot{\theta}r\cos\theta)^2\right) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$PE_{tot} = -mgr(\cos\theta + \sin\theta)$$

Vi skriver ner Lagrangian och förenklar så mycket som möjligt:

$$\mathscr{L} = (\frac{3M}{4} + m)\dot{x}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr(g + \dot{\theta}\dot{x})(\sin\theta + \cos\theta)$$

Vi ser att x inte förekommer i $\mathscr{L}$, så att

$$const = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}} = 2(\frac{3M}{4} + m)\dot{x} + mr\dot{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$$

Om vi startar i vila har vi konstant = 0 så vi får

$$\dot{x} = -\frac{2mr}{3M + 4m}(\sin\theta + \cos\theta)\dot{\theta}$$

Vi får diffrentialen

$$dx = -\frac{2mr}{3M + 4m}(\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta$$

som vi kan integrera från 0 till $\pi/2$.

$$|\Delta x| = \frac{4mr}{3M + 4m}$$