Hemtenta Mekanik 2 2020 (FFM521)

Tid och plats: Torsdag den 04 juni 2020 klockan 08.30-12.30 .
Det är eget arbete som gäller; inget samarbet och inga forumfrågor får ställas i stängda eller öppna forum.
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006 ; tillgänglig via sms och återuppringning

Instruktioner :

Instruktioner för Canvas inlämning Inlämningen skall innehålla det korrekta svaret inringat med rött på första sidan. Därefter ska finnas en kortfattad redovisning av de principer och nyckelsteg som användes för att komma fram till rätt svar. En, max två sidor ska räcka till detta. Detaljer i den egna uträkngen redovisas därefter. Om plats inte finns på sammanfattningen går det att referera till sida och ekvation på bilagan. Sammanfattningen skall vara tillräcklig att bedöma inlämningen. Sidorna ska vara numrerade.

För att full eller delpoäng ska bli tilldelad, ska uppladdningen i Canvas vara fullständig och innehålla sammanfattningen samt uträkningar; allt förväntas vara välstrukturerade och begripliga och skannade så det är väl läsbart, och svaren förenklade så långt som möjligt. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Underlaget skall vara uppladdade til Canvas innan deadline.

Efter uppladdning i Canvas Svarsformler samt sammanfattningen skall även laddas upp i OpenTA som kommer användas som huvudsaklig rättningsplattform. Sist uppladdad svarsformel är den som räknas som slutsvar. För att hjälpa elever undvika slarvfel finns tips såväl som dimensionskoll i OpenTA.

OpenTA stänger tentan efter Canvas och elever har god tid att utföra detta extra moment. Redovisningen i OpenTA får dock absolut inte tillrättalägga Canvas inlämningar; första sidan i OpenTA måste vara exakt den som laddats up i Canvas. Om OpenTA av någon anledning strular blir enbart Canvas uppladdningen betygsgrundande och avgörande.

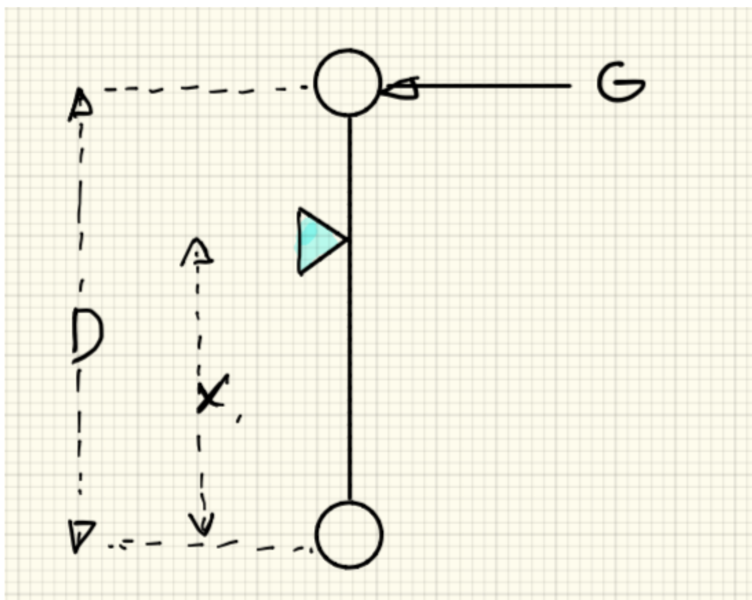
Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 30 poäng.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. Två små massor var och en med massa m är sammankopplade med en masslös stav och ligger stilla på ett frikionsfritt bord. Enbart den övre massan tilldelas en stöt med impulsen G i riktningen vinkelrätt mot staven. Omedelbart till vänster om staven finns en kil. Staven kolliderar elastiskt med kilen och studsar alltså tillbaka i riktningen $-G$. Man observerar att staven och massorna rör sig till höger utan att rotera. Vad blir x/D för att detta ska uppstå?

   - Beräkna x/D

   Svarskontroll: Svaret är ett av följande alternativ. 0, 1 , $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} = .8666025...$, $\sqrt{\frac{1}{2}} = .707107...$, $1 - \sqrt{\frac{1}{6}} = .591752...$, $\frac{2}{\sqrt{5}} = .894427...$



Svar:
Vid stöten G blir RMM runt kilen $mv_0(D-x)$. Efter kollisionen med kilen blir det rotationsfri rörelse och vi får RMM av bara masscentrum: $RMM = mv'(x - D/2)$. Kinetisk energibevaring ger $1/2mv_0^2 = m(v')^2$ dvs $v_0 = \sqrt{2}v'$.

$$\sqrt{2}m(D-x) = (x - D/2) * 2m$$

som ger

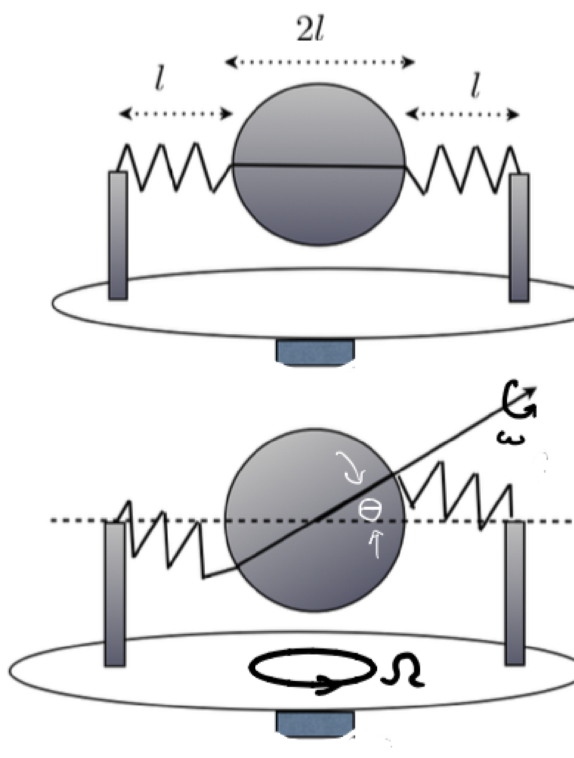
$$\frac{x}{D} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Ett klot med massa m och radie l och tröghetsmoment $\frac{2}{5}ml^2$ är kopplad till en axel med längd $2l$. Ändarna av axlarna är kopplade till varsin fjäder med fjäderkonstant k och osträckt längd noll som sedan blir sträckta också till längd l och fäst i ett stativ ovanför en platta. Klotet roterar friktionsfritt runt axeln genom centrum med vinkelhastighet ω och upptar ett horisontellt läge.

   Plattan börjar sedan rotera med vinkelhastighet Ω. Beräkna $\tan\theta$ där θ är vinkeln mellan klotaxelns och horisontalplanet. Det går att räkna exakt; ni kan använda er av approximationen av liten vinkel θ om ni önskar och då får ni fram samma formel.

   Bortse från gravitationen.

   Om $l = 1 meter$, $m = 5kg$, $k = 2kg/s^2$, $\omega = 1/s$ *och* $\Omega = 1/s$ *blir svaret* $1/4$.



Svar:
Låt $l\hat{r}$ vara origo till fjäderns fästpunkt. I vila $l\hat{x}$. Vid rotation $\vec{F} = k\,l(2\hat{x} - \hat{r})$ ger kraften i fjädern.

Då klotet har I proporionell till enhetsmatrixen blir H proportionell mot $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$.

Detta leder till förenklingen att $\Omega \times (I(\omega + \Omega)) = I\Omega \times \omega$.

Eftersom $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{z}$ så får vi ett vridmoment från höger fjäder $\vec{r} \times \vec{F}$. Av symmetri ger vänstra fjäder samma resultat.

$\vec{M}_{tot} = 2\vec{r} \times \vec{F} = 2kl^2\hat{r} \times (2\hat{x} - \hat{r}) = 4kl^2 \sin\theta\ \hat{y}$

Vi har också $\vec{M} = \vec{\Omega} \times (\frac{2}{5}ml^2)\vec{\omega} = \frac{2}{5}ml^2\Omega\omega\cos\theta\ \hat{y}$, därigenom får vi

$$\tan\theta = \frac{1}{10}\frac{m\omega\Omega}{k}$$

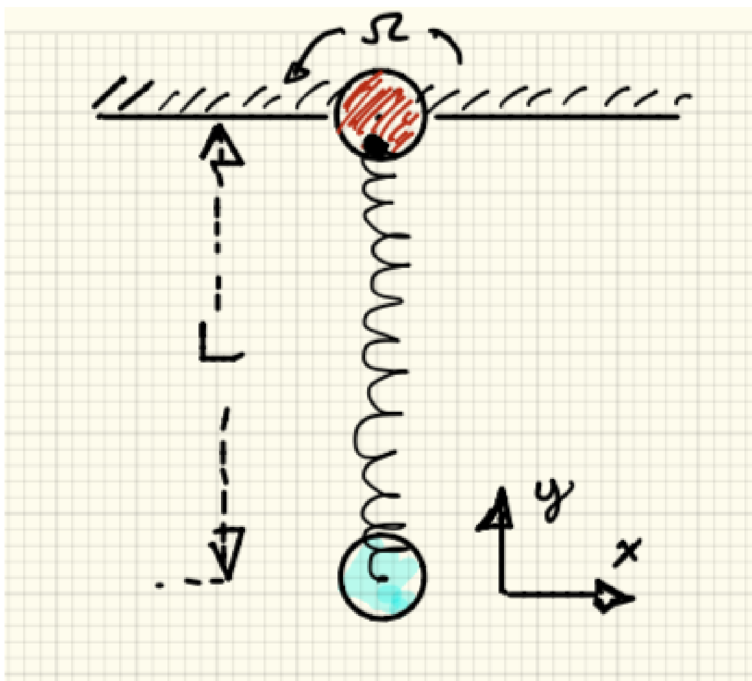
3. En liten massa med m hänger i ändan av en fjäder med osträckt längd noll som då sträcks vid jämnviktsläge till längd $L = mg/k$. Den tillåts små svängningar i x och y. Beräkna egenfrekvenserna för små svängningar.

   Fästpunkten B drivs sedan runt i en cirkelbana med $x_B = r\cos\Omega t$ och $y_B = r\sin\Omega t$ som sätts till $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Massan dämpas med friktionskraft $F_f = -\gamma(\dot{x}\,\hat{x} \;+\; \dot{y}\,\hat{y})$.

   Efter en tid har initialvillkoren försvunnit och massan rör sig regelbundet. Beräkna max amplituden i x och y led, samt $|y(t)/x(t)|$ för detta specialfall. *Obs: inte alla tillåtna variabler förekommer nödvändigtvis i svaren*

   - Beräkna båda egenfrekvenserna; skriv som en lista $[\omega_1, \omega_2]$
   - Beräkna $|\frac{y(t)}{x(t)}|$ för $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

   Tips: Egenvärden förekommer bland listan $\sqrt{\frac{g}{L}}$, $\sqrt{(\frac{g}{L}) + (\frac{k}{m})}$, $\sqrt{\frac{k}{m}}$, $(\frac{gk}{mL})^{1/4}$. *Tänk på att egenvärdena kan vara degenerade.*



Svar:

Låt vektorn från massans mitt till fästpunten vara $R_x\hat{x} + R_y\hat{y}$ där $R_x = R\cos\theta$ och $R_y = R\sin\theta$. Notera att energin är $\frac{1}{2}kR^2 - (mgr_y) = \frac{1}{2}k(x^2 + (L-y)^2) - mg(L-y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + konstant)$ där x och y är avvikelsen från stationära läget och där linjära termerna blir garanterat noll p.g.a. jämviktläge. Vi ser därför att den återställande kraften motsvarar en effektiv fjäderkkonstant k i både x och y -led. Båda egenfrekvenserna är därför $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Genom insätting av $m\Omega^2 = k$ får vi bara kvar den dissipativa delen av diffekvationen Vi ansätter $x = Re\ a\, e^{i\Omega t}$ och $y = Re\ b\, e^{i\Omega t}$

$$\begin{aligned} i\gamma\Omega a &= kr \\ i\gamma\Omega b &= -ikr \end{aligned}$$

Så vi får

$$\begin{aligned} x(t) &= Re\ \tfrac{kr}{i\gamma\Omega}e^{i\Omega t} = \tfrac{kr}{\gamma\Omega}\sin\Omega t \\ y(t) &= Re\ \tfrac{-kr}{\gamma\Omega}e^{i\Omega t} = -\tfrac{kr}{\gamma\Omega}\cos\Omega t \end{aligned}$$

varvid vi får

$$|\frac{y(t)}{x(t)}| = |-\cot\Omega t| = |\cot\Omega t|$$

4. En tunn sfär med tröghetsmoment $I = \frac{2}{3}MR^2$ roterar friktionsfritt med vinkelhastighet Ω_0 runt en vertikal axel. En skalkrypare tar sig från nordpolen till sydpolen genom att krypa rakt söderut med konstant hastighet och kommer fram efter en tid T.

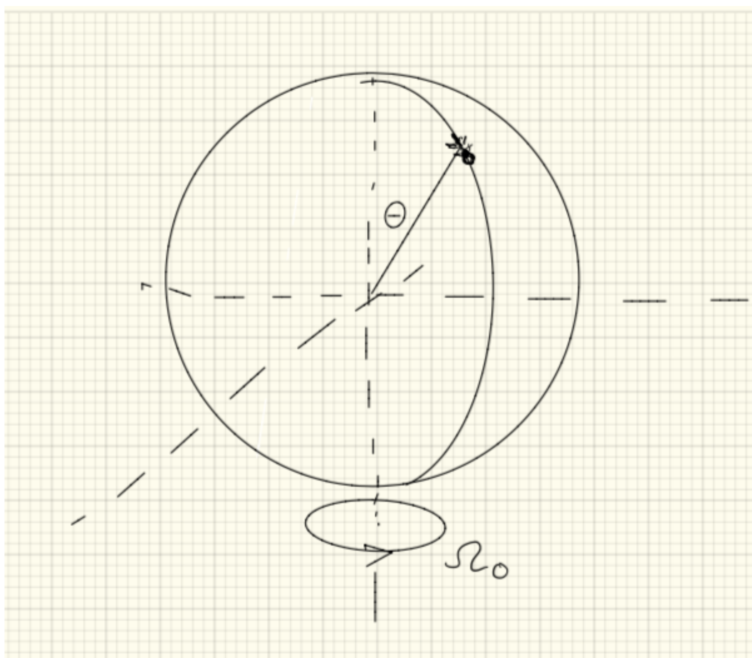
   Antag att sfären förblir upprätt under vandringen. Vilken vinkel $\Delta\psi$ vrider sig sfären runt sin axel under tiden skalkryparen vandrar? Mer specifikt, under lösningen kommer ni behöva bestämma en integral,

$$\Delta\psi = \Omega_0 T \int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta\,,$$

   vad blir $f(\theta)$?

   Tips för svarskontroll, om integralen evalueras blir vinkeln:

$$\Delta\psi = \Omega_0 T \sqrt{\frac{2M}{2M+3m}}$$



Svar:

Låt $i = \frac{2}{3}$. RMM bevarat ger

$$(iMR^2 + mR^2 \sin^2\theta)\frac{d\psi}{dt} = iMR^2\Omega_0$$

Detta ger

$$(1 + \frac{m}{iM}\sin^2\theta)\frac{d\psi}{dt} = \Omega_0$$

med variabelbyte

$$(1 + \frac{m}{iM}\sin^2\theta)\frac{d\psi}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt} = \Omega_0$$

Vi har $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{T}$ så vi får

$$\Delta\psi = T\Omega_0 \int_0^\pi\ \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + \frac{m}{iM}\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$\Delta\psi = \Omega_0 T\sqrt{\frac{iM}{iM + m}} = \Omega_0 T\sqrt{\frac{2M}{2M + 3m}}$$

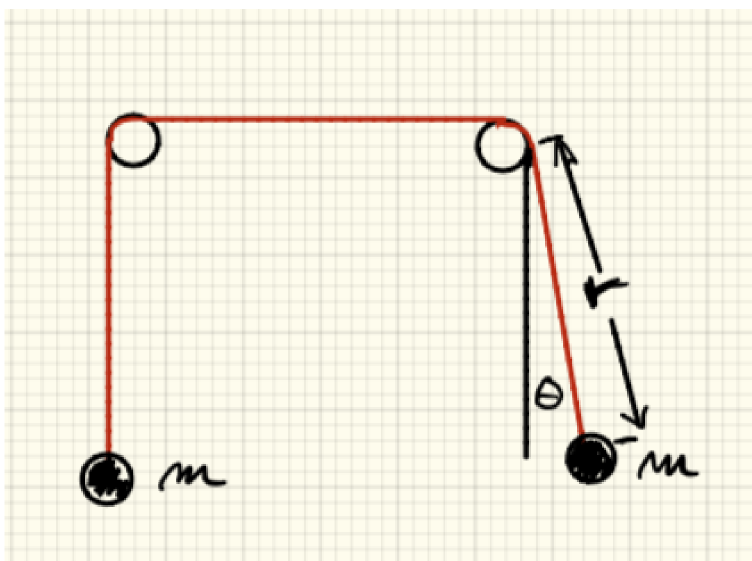
5. Två små massor är kopplade med en lina som ligger friktionsfritt över två små fästa stänger enligt figuren. Den vänstra rör sig enbart vertiklalt medan den högra röra sig i ett plan. Låt r vara avståndet från det högra blocket till massan, och låt θ vara avvikelsen från vertikal av linan. Beräkna Lagrangian och rörelsekvationerna. *För att unikt specificera Lagrangianen bör den väljas så att den är noll vid vila och jämvikt.*

   Låt oss anta att massan till vänster är inledningsvis i vila; beräkna om den accelerar uppåt eller neråt om pendeln till höger svänger med liten amplitud θ_{max} och uppskatta medelvärdet av accelerationen av massan till höger över en period av pendeln.

   För att göra detta utveckla $\cos\theta$ som $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ och utnyttja att medelvärdet av att $\sin^2(\omega t)$ och $\cos^2 \omega t$ över en period är $\frac{1}{2}$.

   Beräkna

   - (3p) Lagrangian $\mathscr{L}$
   - (2p) Lagrange rörelseekkvationer som löses för $\ddot{\theta}$ och $\ddot{r}$
   - (1p) Snitt värdet och riktning av accelleration av vänstra massan över en svängingsperiod av den högra.



Svar:

$$\mathscr{L}(\theta,\dot{\theta},r,\dot{r}) = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mr(1-\cos\theta)g$$

För att unikt specificera L sätter vi $\mathscr{L}(0,0,r,0) = 0$

Lagrange ekvationerna blir

- $\ddot{r} = \frac{1}{2}r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(1-\cos\theta)g$
- $\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = -mr\sin\theta g$

Den sista ekvationen utvecklas och man löser ut

$$r\ddot{\theta} = -(g\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Vi utvecklar $1-\cos\theta$ till $\frac{1}{2}\theta^2$ i uttrycket för $\ddot{r}$. Genom att ansätta pendelrörelsen i högra pendeln till $\theta(t) = \theta_{max}\cos\omega t$ får vi θ och $\dot{\theta}$ och kan man räkna ut accellerationen från

$$\ddot{r} = \frac{1}{2}(\theta_{max}^2 g(\sin^2\omega t - \frac{1}{2}\cos^2\omega t))$$

Vilket blir i snitt

$$\frac{1}{8}\theta_{max}^2 g$$

positivt, så att den vänstra massan rör sig uppåt. Rimligt, då svängninarna leder till en centrifugalgraft som marginellt ökar spänningen i linan. Inget avdrag för minusteckenfel görs i sista delfråga pg.a pg.a vänster/höger fel i tesen.

Formelblad

Formelblad

- $\int_0^\pi \; 1/(a^2 + sin^2(x))\, dx \; = \; \pi/(a\sqrt{1+a^2})$
- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i \Omega_j - sin(\theta)\, \epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}} (\delta_{ij} (\vec{r})^2 - \vec{r}_i \vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum (I_{cm})_{ij} + M\,(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där A, B och C är längden av sidorna mittemot vinkeln a, b och c.*
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.