Speciell omtenta i Mekanik 2 2019 (FFM521)

Tid och plats: Fredagen den 17 januari 2020 klockan 08.30-12.30 .
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade, och svaren förenklade så långt som möjligt. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 6 poäng med delpoäng angivna i varje uppgift.

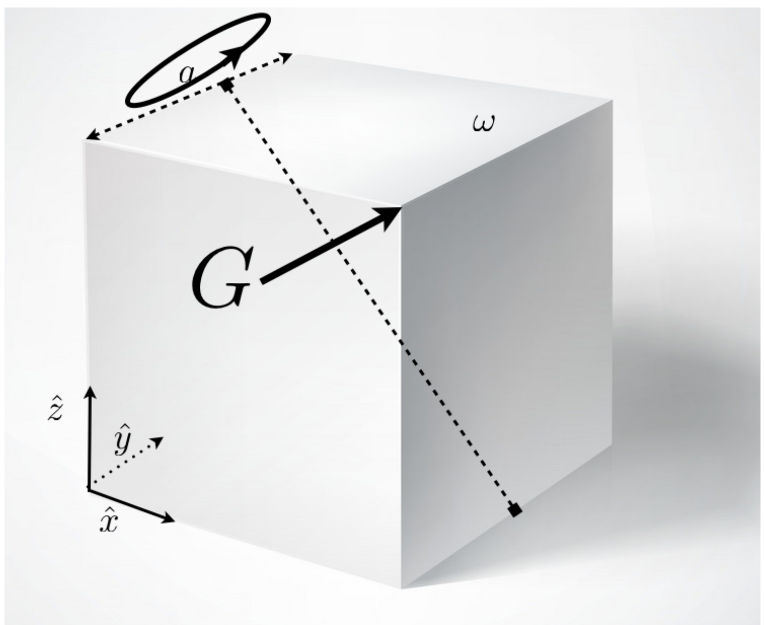
Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 30 poäng. *Denna tenta prövar enbart grundläggande kunskaper för kursen och ger underlag därför enbart till G.* Betygsgränsen till G är 15p.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. Ett homogent rätblock med massa m och dimension a har tröghetsmoment $\frac{1}{6}ma^2I$ där I är identitetsmatrisen. Blocket, indledningsvis i vila i rymden, träffas av en stöt G i hörnet och och riktning längs en kant enligt figuren. Blocket observeras röra sig efteråt med fart $|v|$.

   Inga fler variabler än a, m, v samt rikningsvektorerna $\hat{x}$, $\hat{y}$ och $\hat{z}$ skall användas i svaren.

   - 1p Beräkna stötens $\vec{G}$ magnitud och riktning.
   - 3p Beräkna kubens vinkelhastigheten ω efter stöten (belopp) och rotationsaxelns riktning (vektor) i rymden.
   - 2p Rita rotationsaxeln i figuren samt rita med en cirkelbåge rotationsriktningen.

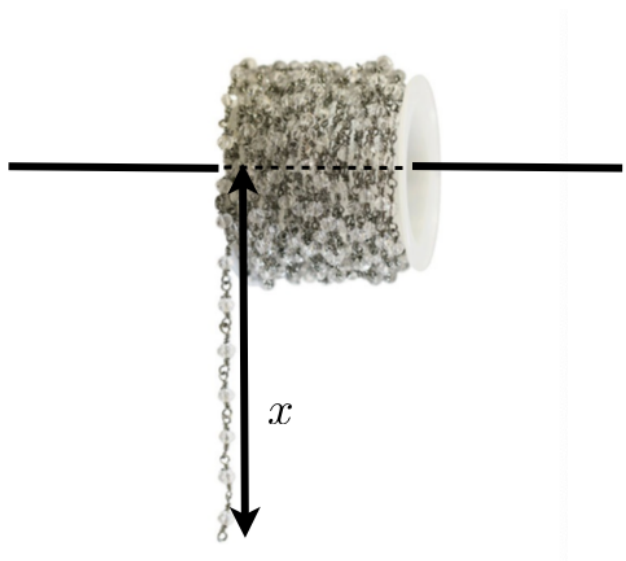


Svar:

- $H_{before} = R \times G = H_{after}$ och $G_{before} = G_{efter}$ Efteråt blir alltså $\vec{G} = m\vec{v}$ och $\hat{G} = \hat{y}$ och $|G| = m|v|$.
- Stöten angriper klossen vid läget $R = \frac{a}{2}(1, 1, 1)$ så $H = \frac{aG}{2}(1, -1, 1) \times (0, 1, 0) = \frac{amv}{2}(-\hat{x} + \hat{z})$ Vinkelhastigheten ges av $\frac{1}{6}ma^2I\omega = H$ så vi får $\vec{\omega} = \frac{3v}{a}(-\hat{x} + \hat{z})$ och vi får därigenom $\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{z} - \hat{x})$ och $|\omega| = \frac{3v\sqrt{2}}{a}$

2. En tunn kedja med total längd L och total massa m är lindad runt en spole med radie R massa M. Spolen utan kedja har tröghetsmoment $\frac{1}{2}MR^2$. Spolen roterar friktionsfritt på en axel genom centern. Vi antar en liten (infinitesimal) bit kedja hänger utanför och spolen börjar därför rotera och kedjan lindas av och börjar falla mot marken. Vad blir $\dot{x}$ då en längd x lämnat rullen. Vi antar kedjans massa inledningsvis är jämnt fördelat runt spolen och att förloppet sker utan friktion.

   - (2p) Ange vilka principer skall användas för att lösa uppgiften.
   - (4p) Ställ upp en enda ekvation i termer av x , $\dot{x}$ och parametrar m, L, M , R och g som kan enkelt lösas för att erhålla $\dot{x}$.



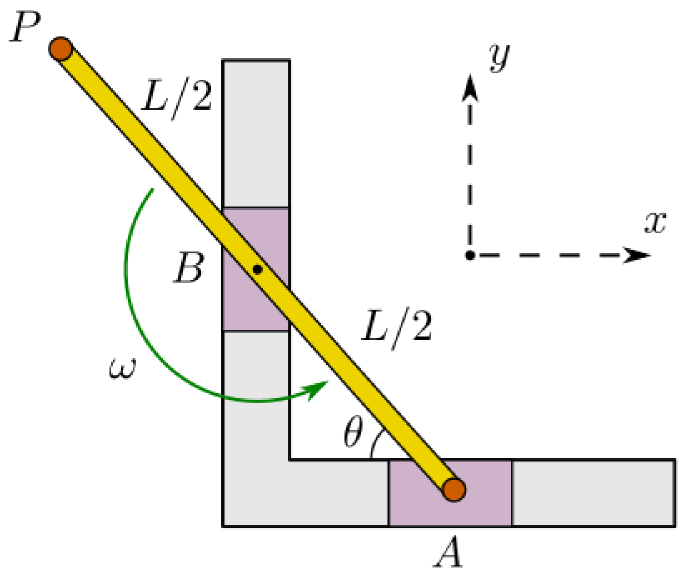
Svar:

- Bevara totalenergi
- Kinetisk energi = förlorad potentialeneri. Notera att varje del av kedjan, oavsett lindad eller sträckt rör sig med fart v så att kedjans kinetiska energy blir alltid $\frac{1}{2}mv^2$ oavsett hur mycket som är utrullad.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}M(\omega R)^2 = \frac{1}{2}(m + \frac{1}{2}M)\dot{x}^2 = \frac{gx}{2}\frac{mx}{L}$$

3. En stav med längd L rör sig efter begränsningen från banorna för klossarna A och B enligt figuren. Vid det avbildade ögonblicket befinner staven sig med en lutning θ mot horisonten och roterar med vinkelhastigheten ω .

   - (6p) Bestäm den relativa farten $|v_P - v_A|$ i det avbildade ögonblicket.



Svar:
Enligt formelsamlingen är $v_P = v_A + \omega \times r + v_{rel}$ Eftersom $v_{rel} = 0$ får vi $v_P - v_A = \omega \times r$ och därigenom $|v_P - v_A] = \omega L$

4. En vagn med massa m är kopplad till en fjäder med fjäderkonstant k och en dämpare med dämpningskonstant c. Vagnen påverkas med en störningskraft $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. *Obs: Beroende variabler såsom ξ , ω_c osv skall ej förekomma i svaren, ger inga delpoäng och bör dessutom undvikas i beräkningen.*

   - (2p) Skriv ner diffrentialekvationen för allmänt $x(t)$ så enkelt som möjligt i termer av k, c , m och $F(t)$.

     Svar:
     $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$
   - (2p) Motivera och bestäm c i termer av k och m för kritisk dämpning.

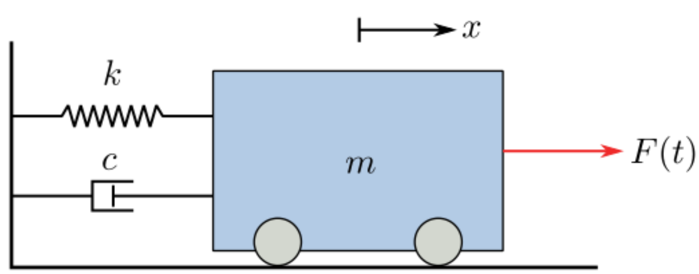
     Svar:
     Vi söker speciallösning av formen $x = Ae^{i\omega t}$ och får ekvationen

     $$(-\omega^2 m + ci\omega + k)A = F_0$$

     Vid kritisk dämpning skall rötterna polynomen $P(\omega) = m\omega^2 - ci\omega - k$ vara degenererade så vi har enligt PQ satsen $c^2 = 4km$ dvs $c = 2\sqrt{km}$.
   - (2p) Beräkna max amplituden för $x(t)$ i termer av k, m, F_0 och ω då c är vald för kritisk dämpning. *Enbart k, m, ω och F_0 skall förekomma i svaret.*

     Svar:
     Max amplituden, som avläses från ovan ekvationen som relaterar F_0 och A ger

     $$|A| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c^2\omega^2)}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + 4km\omega^2}} = \frac{F_0}{k + m\omega^2}$$



5. Kinetiska energin av en partikel i polära koordinat anges av $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Partikeln befinner sig i en potentialgrop med potentialenergi $V(r, \theta)$.

- (4p) Beräkna rörelseekvationerna från Lagrange ekvationerna.

  Svar:
  $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial r}$ ger

  $$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \frac{\partial V}{\partial r}$$

  och $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta}$ ger

  $$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

- (2p) Om vi antar $V(r, \theta) = f(r)$ dvs inget vinkelberoende i potentialen finns två bevarade storheter. Ange dessa. *Ett väl motiverat svar utan en referens till första delfråga räcker till 2 delpoäng.*

  Svar:
  Total energin som ges av $T + V$ och rörelsemängdsmomentet

  $$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

  Svaret är korrekt med eller utan faktor m.

Formelblad

Formelblad

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j}cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\,\epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum(I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B)\cdot(C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.