Andra omtentamen i Mekanik 2 2019 (FFM521)

Tid och plats: Fredagen den 11 oktober 2019 klockan 08.30-12.30 Samhäll.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

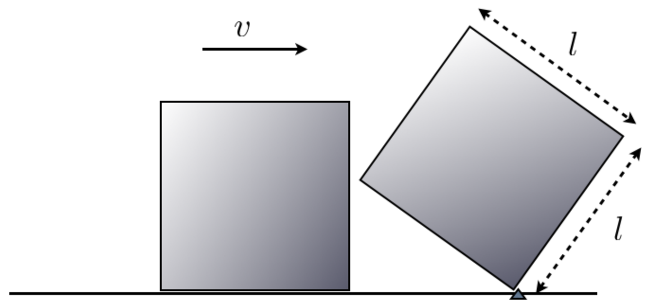
Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 eller 2 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 30 poäng på denna deltentamen. Betygsgränser till 3,4,5 är 10,17,25.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. Ett homogent rätblock (se figuren) glider med farten v på ett horisontellt underlag, då det stöter på en kant, så att det främre nedra hörnet stannar. Det kan antagas stanna där under den fortsatta rörelsen. Hur stor skall v^2 minst vara för att rätblocket skall kunna tippa över (dvs. för att dess masscentrum skall passera förbi hacket)? *Tröghetsmomentet av fyrkanten är* $\frac{1}{6}ml^2$



Svar:
Rörelsmängdsmomentet runt klossen innan den träffar den blir densamman som efter. Enligt Steiners sats blir tröghetsmomentent runt fyrkantens hörn: $\frac{1}{6}ml^2 + m\frac{1}{2}ml^2 = \frac{2}{3}ml^2$ Detta ger en likhet för rörelsemängsdsmomentet före och efter till

$$H_0 = \frac{1}{2}mvl = (\frac{2}{3}ml^2)\dot{\theta} = H'$$

och

$$\dot{\theta} = \frac{3v}{4l}$$

Under den fortsatta rörelsen är energin bevarad, och för att klossen ska nå just till topp hörnet gäller alltså att

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}ml^2)\dot{\theta}^2 = mg\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)l$$

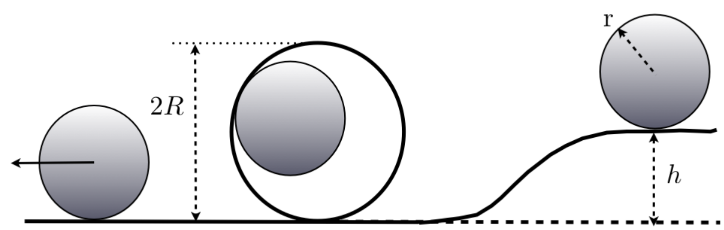
Efter insättning för $\dot{\theta}$ i termer av v kan vi då lösa ut v^2 till

$$v^2 = \frac{8(\sqrt{2}-1)gl}{3}$$

Specialfall från tenta 2015-08-27

2. En kulbana är konstruerad enligt figuren. En kula med massa m startar i vila, rullar nerför rampen och gör sedan en loop vars radie är R. Vad blir minsta höjd h för att kulan inte ska släppa kontakten med kulbanan

   Tröghetsmomentet för kulan är imr^2 där $i = \frac{2}{5}$. För att underlätta felsökning och rättning, använd gärna variablen "i" i din räkning fram till sista raden. En loop-the-loop för en berg och dalbana motsvarar fallet $r = 0$ och $i = 0$ och ger $5/2R$, en enklare uppgift som passar i FFM516.



Demonstration på https://youtu.be/dA_UO86MjLY . De har dock inte tagit hänsyn till att radien på kulan har betydelse.

Svar:
Vi noterar att om θ är läget av kontaktpunken på den stora cirkeln och ϕ är kontaktpunken på den lilla cirklen blir förhålldet $R\theta = r\phi$. Rymdvinklen av rotationen av kulan blir $\phi - \theta$. Energibevaring ger

$$mg(h + 2r - 2R) = \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}imr^2(\dot{\phi} - \dot{\theta})^2$$

Därigenom får vi

$$mg(h + 2r - 2R) = \frac{1}{2}m(R - r)^2(1 + i)\dot{\theta}^2$$

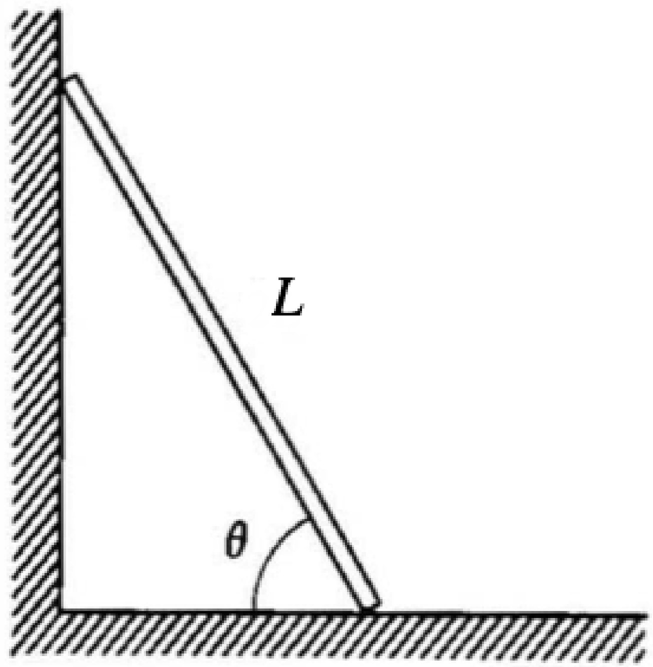
Masscentrum roterar med vinkelhastighte $\dot{\theta}$ och vi får

$$mg = m\dot{\theta}^2(R - r)$$

Genom att lösa för $\dot{\theta}^2$ if första ekvation får vi

$$h = \frac{(5 + i)(R - r)}{2} = \frac{27}{10}(R - r)$$

3. En stav med tröghetsmoment $I = imL^2$ placeras vertikalt och ostabilt mot en vägg. Botten av staven börjar glida iväg friktionsfritt från väggen. Vilken höjd h når toppen av staven när den släpper kontakt mot väggen. Antag hela förloppet sker friktionsfritt. Specialisera det slutgiltiga svaret till fallet för en rät stav där $I = \frac{1}{12}mL^2$.



Svar:

Vi noterar att masscentrum följer cirkelbågen $R_{cm} = \frac{L}{2}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y})$ varvid fås

$$K.E. = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}iL^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2(\frac{1}{4}+i)\dot{\theta}^2$$

Enligt energigprincipen skall kinteiska energi var lika med lägesenergiförlusten:

$$\frac{1}{2}mL^2(\frac{1}{4}+i)\dot{\theta}^2 = mg\frac{L}{2}(1-\sin\theta)$$

Vi löser ekvationen för $\dot{\theta}^2$ och finner

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{L(1+4i)}(1-\sin\theta)$$

Eftersom den enda krafter som ger masscentrums acceleration i x-led kommer från kontakten med väggen, är villkoret som skall uppfyllas för att svara på frågan vara

$$0 = \ddot{x}_{cm} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{L}{2}\cos\theta = -\frac{d}{dt}\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta = -\frac{L}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$$

och därigenom

$$\sin\theta\ \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2\ \cos\theta$$

Vi kan beräkna $\ddot{\theta}$ genom at diffrentiera tidigare ekvation

$$2\dot{\theta}\ \ddot{\theta} = \frac{-4g}{(1+4i)L}\ \cos\theta\ \dot{\theta}$$

och får därigenom

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{(1+4i)L}\cos\theta$$

Nu ersätter vi:

$$2\cancel{\frac{g}{(1+4i)L}}\cancel{\cos\theta}\sin\theta = 4\cancel{\cos\theta}\cancel{\frac{g}{(1+4i)L}}(1-\sin\theta)$$

och vi får

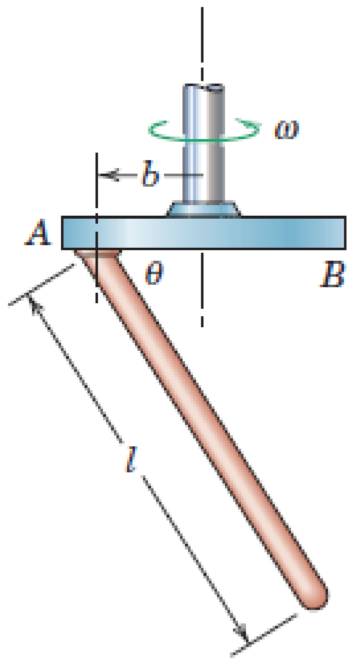
$$\sin\theta = \frac{2}{3}$$

Ett roligt och något oväntat resultat att svaret blir oberoende tröghetsmomentet.

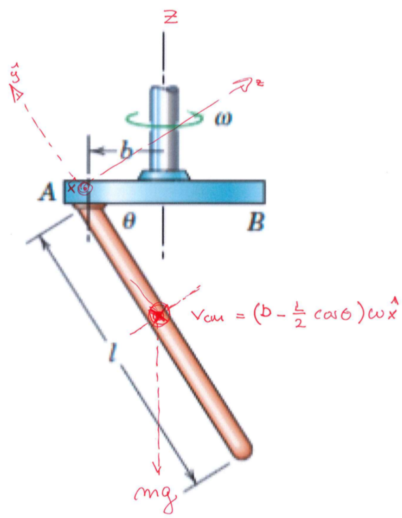
Svar: $\frac{2}{3}L$

OpenTA 7a

4. En jämn tunn stav med längd l sitter fastsvetsad på undersidan av en disk på avstånd b från diskens centrum, och med vinkel θ mot disken. Disken roterar kring sitt centrum med en vinkelhastighet ω. Bestäm värde på ω så att momentet vid svetspunkten är noll.



Svar:



Vi räknar runt svetspunkten; $M = I\omega + mr_{cm} \times \Omega$. I kroppsfixerade koordinat ger detta följande data

$$I = \frac{mL^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

,

$$r_{cm} = \frac{L}{2}[0, 1, 0]$$

,

$$\Omega = -\omega[0, -\sin\theta, \cos\theta]$$

,

$$v_{cm} = \omega(b - \frac{L}{2}\cos\theta)[1, 0, 0]$$

Nu använder vi att

$$M = I\Omega + mv_{cm} \times r_{cm} = \frac{mL\omega(2L\cos\theta - 3b)}{6}\,\hat{z}$$

Vridomomentet skall motsvara den tillfört av gravitationen för att momentet runt svetspunkten ska vara noll:

$$\Omega \times M = \frac{mgL\cos\theta}{2}\,\hat{x}$$

som ger ekvationen

$$\frac{m\omega^2 L}{6}\,(3b - 2L\cos\theta)\sin\theta = \frac{mgL\cos\theta}{2}$$

och vi erhåller $\omega^2 = \frac{3g\cot\theta}{2l\cos\theta - 3b}$

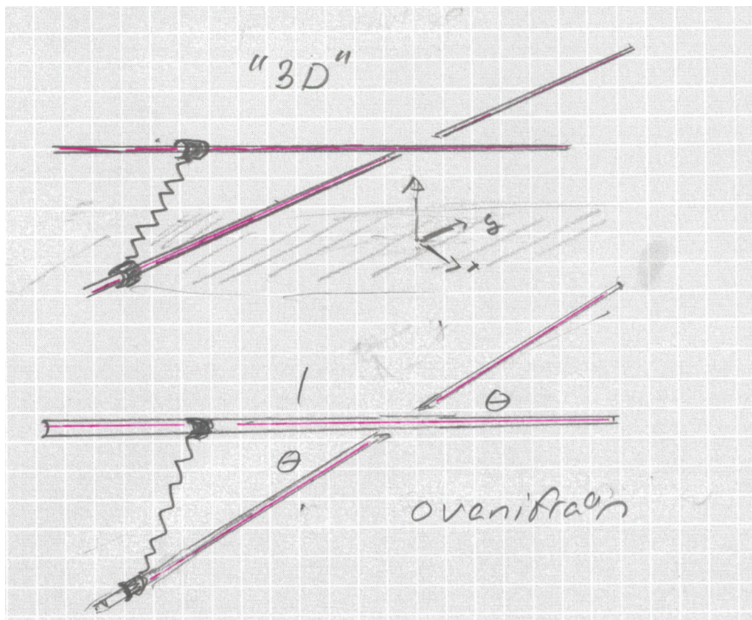
5. Två kragar var och en med massa m löper friktionsfritt på två stänger såsom i bilden. Konfigurationen kan skapas genom att först lägga de två stängerna på x-axeln, sedan vrida den ena runt z-axeln med vinkel θ och flytta den ett avstånd d längs z axeln. Massorna är kopplade med en fjäder som har en fjäderkonstant k och en osträckt längd 0.

   (a) Beräkna egenfrekvenserna och normalmoderna för små svängningar.

   (b) Skriv ner den allmäna lösningen och skissera respektive normalmoder.

   (c) Betrakta fallet $\theta = 0$, skriv ner och tolka den allmäna lösningen.

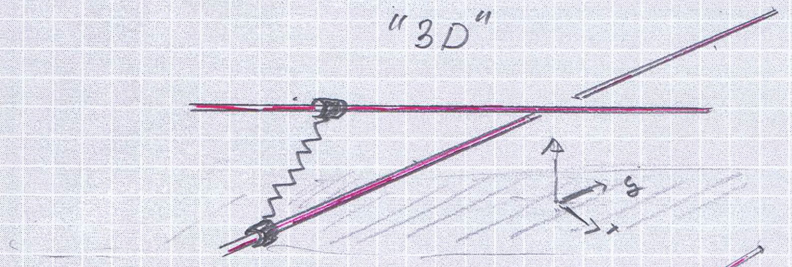
   Läs uppgiften noga; svara på alla delfrågor!

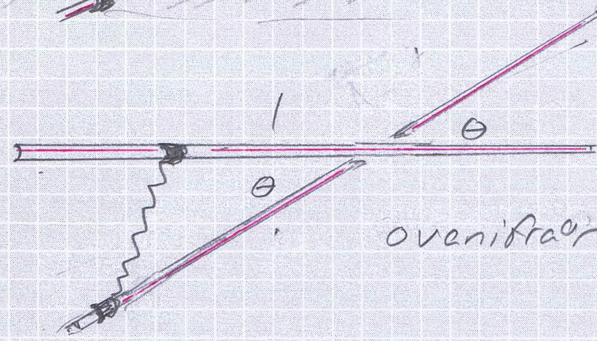


Svar:
$\omega^2 = \frac{k}{m}(1 \pm \cos\theta)$

Förekom på tenta 2017-06-02

"3D"





$$V = \tfrac{1}{2} k \, (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} k \quad r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$$

$$= \tfrac{1}{2} k \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2 \cos\theta$$

$$-\omega^2 T + V = \begin{bmatrix} -m\omega^2 + k & -k\cos\theta \\ -k\cos\theta & -m\omega^2 + k \end{bmatrix}$$

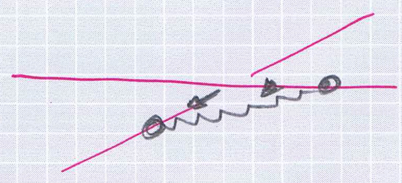
$$(k - m\omega^2)^2 = k^2 \cos^2\theta$$

$$(k - m\omega^2) = \pm k\cos\theta$$

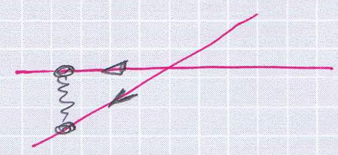
$$m\omega^2 = k \pm k\cos\theta$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}(1 \pm \cos\theta)}$$

$$\omega_+^2 = \frac{k}{m}(1+\cos\theta) \qquad v = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$



$$\omega_-^2 = \frac{k}{m}(1-\cos\theta) \qquad v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$



$$\theta = 0 \Rightarrow \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega_- = 0$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = (x_0 + vt)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} +$$

$$(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Formelblad

Behåll detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_{\Omega}(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\, \epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum(I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.