Första omtentamen i Mekanik 2 2019 (FFM521)

Tid och plats: Torsdagen den 29 augusti 2019 klockan 08.30-12.30 Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

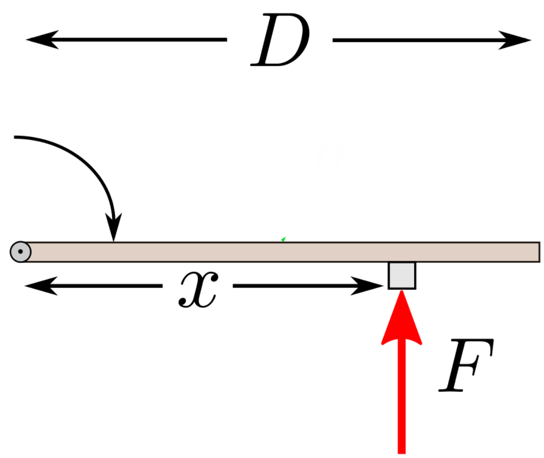
Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 eller 2 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 30 poäng på denna deltentamen. Betygsgränser till 3,4,5 är 10,17,25.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. En stav roterar runt ett gångjärn och stoppas av en kloss ett avstånd x från gångjärnet. Vad skall x vara för att minimera reaktionskrafterna på gångjärnet när staven stoppas. Tröghetsmomentet av en tunn stav runt dess masscentrum är $\frac{1}{12}MD^2$. *I OpenTA användes ordet "dörrblad", en geometry som i verkligheten blir mer komplicerat än det som är avsedd.*



Svar:
För att hitta klossens läge gäller det att hitta en punk runt vilken stavens rörelsemoment är noll så att den enda kraft som verkar blir F. Runt denna punkt är rörelsemängdsmomentet

$$0 = M = mv_{cm}(\frac{D}{2} - x) + \frac{1}{12}mD^2\dot{\theta}$$

Då $v_{cm} = \frac{D}{2}\dot{\theta}$ får vi ekvationen

$$\frac{D}{2}\dot{\theta}(x - \frac{D}{2}) = \frac{1}{12}D^2\dot{\theta}$$

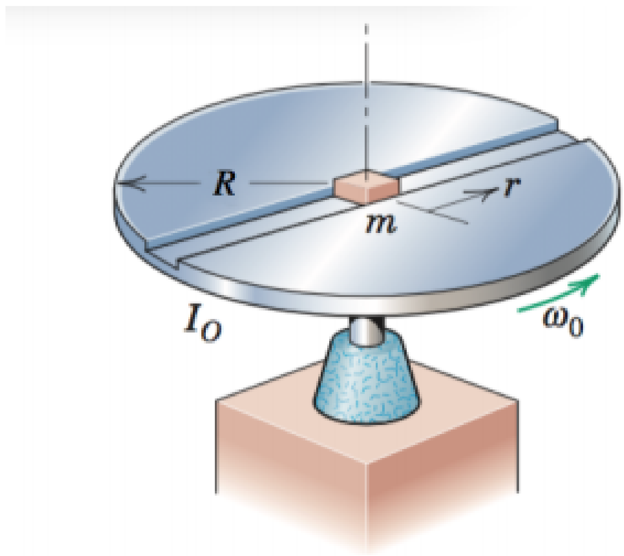
Denna ekvation löses enkelt för x och vi får

$$x = \frac{2}{3}D$$

från OpenTA

2. Ett litet block med massa m glider friktionsfritt i skåran på en fritt roterande platta med rörelsmängdsmoment $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Initialt roterar plattan med vinkelhastigheten ω_0 och massan befinner sig i centrum. Massans läge är där ostabilt och börjar röra sig utåt kanten.

   Bestäm $\dot{r}$ som en funktion av positionen r under tiden klossen glider is skåran.



Svar:

Eftersom rörelsemängdsmoment är bevarad har vi

$$I_0\omega_0 = (I_0 + mr^2)\omega$$

Vi noterar att kinetiska energin är bevarad, så vi har

$$\frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

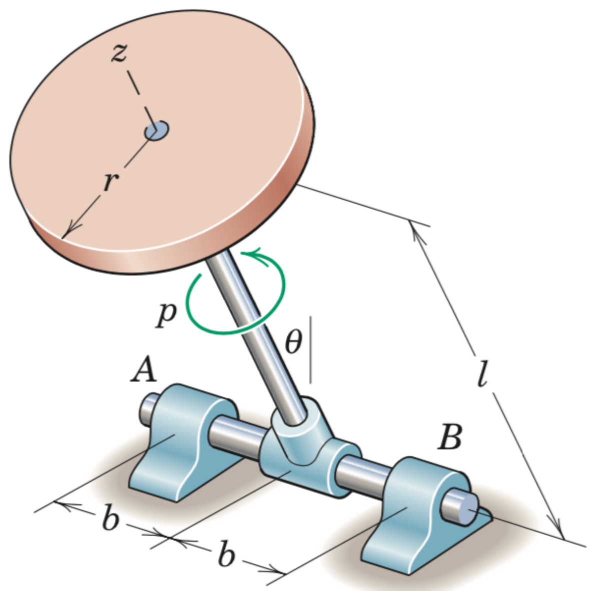
Genom att lösa ut $\dot{r}$ i denna ekvation och använda ovan för ω får vi

$$\dot{r}^2 = \frac{\omega_0^2 r^2}{1 + \frac{2mr^2}{MR^2}}$$

Tenta 2017-10-06

3. En disk av massa m snurrar friktionsfritt på en axel med rotationshastighet p enligt figuren. Avståndet av diskens fästpunkt till axeln är l. Om axeln släpps fri i vila i vertikalt läge, bestäm $\dot{\theta}$ och de horisontella komponenterna av reaktionskrafterna vid kullager F_A och F_B när axeln passerar horistontellt läge. Bortse från massan av alla komponenter förutom disken. Tröghetsmomentet av en disk runt symmetriaxeln $I_{||} = \frac{1}{2}mR^2$ och $I_\perp = \frac{1}{2}I_{||}$ runt de andra två huvudaxlarna. Avstånden mellan kullagren är $2b$.

- (2p) Beräkna $\dot{\theta}$ när axeln passerar horisontalläge.
- (4p) Beräkna F_A och F_B i termer av $\dot{\theta}$ samt de givna parametrarna i detta ögonblick.



Svar:

$\dot{\theta}$ can erhållas genom att bevara totalenergi :

$$\frac{1}{2} I_{||} p^2 + \frac{1}{2} \left(I_\perp + ml^2 \right) = mgl + \frac{1}{2} I_{||} p^2$$

eftersom rotationen runt symmetriaxeln är konstant. Genom att använda $I_\perp = \frac{1}{4} mr^2$ får vi

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{8gl}{r^2 + 4l^2}}$$

Totala momentet blir

$$b(F_A - F_B)\hat{x} = [0, \dot{\theta}, 0] \times [0, (ml^2 + I_\perp)\dot{\theta}, I_{||} p] = \frac{1}{2} \dot{\theta} p m r^2 \hat{x}$$

så vi får ekvationen

$$(F_A - F_B) = \frac{1}{2b} \dot{\theta} p m r^2$$

Vi har också horisontalled av centripetalacceleration av diskens mittpunkt att ta hänsyn till.

$$F_A + F_B = m\dot{\theta}^2 l$$

Vi får slutligen:

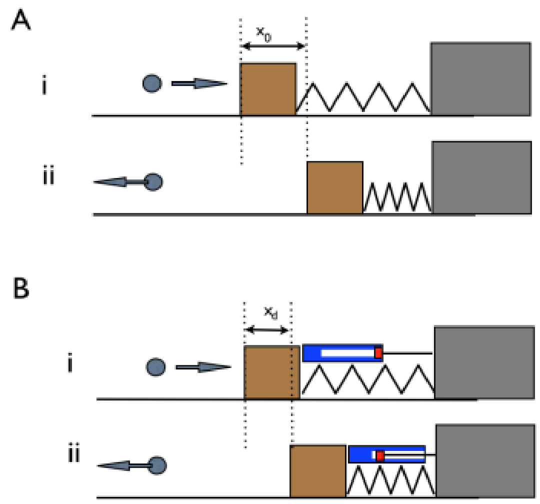
$$\begin{aligned} F_A &= \frac{m\dot{\theta}}{2} \left(\frac{r^2}{2b} p + l\dot{\theta} \right) \\ F_B &= -\frac{m\dot{\theta}}{2} \left(\frac{r^2}{2b} p - l\dot{\theta} \right) \end{aligned}$$

4. Den gråa klossen till höger är fast monterad i underlaget. Den mindre bruna klossen är fäst i en fjäder och glider friktionsfritt på underlaget. Antag att som i figur A, den bruna, initialt stillastående, klossen träffas av en kula som inte fastnar i klossen. Klossen rör sig därefter till x_0 innan den vänder vid ett maxavstånd x_0.

   Man monterar sedan en stötdämpare, anpassad så att systemet är kritiskt dämpat när man använder samma kloss och fjäder, och och gör därefter om experimentet. Nu blir max amplituden x_d när den dämpade klossen vänder.

   Definiera egna variabler som kan vara nödvändiga, t.ex. fjäderkonstant, massor av kloss och kula, dämpningskonstant, hastighet hos kulan.

   (a) Beräkna x_d/x_0



Svar:

Odämpade resp. dämpade ekvationer är

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

När man ansätter $x = ae^{i\omega}$ blir karaktäristiska ekvationen för ω

$$-m\omega^2 + ic\omega + k = 0$$

För det odämpade fallet får vi med begynnelsevillkor $x(0) = 0$, lösningen $x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \frac{k}{m}t$, så att amplituden $x_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

I det dämpade fallet, har vi villkoret att systemet ska vara kritiskt dämpat, att den karaktäristiska ekvationen har en degenerad rot. Detta för att kunna få en polynom i t som en faktor i lösningen. Vi får

$$\omega^2 - ic\omega/m - \frac{k}{m} = (\omega - i\sqrt{\frac{k}{m}})^2$$

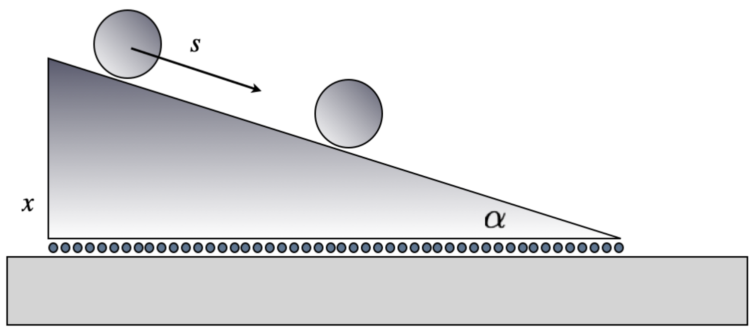
därmed $c = 2\sqrt{km}$. Lösningarna i detta fall är $x(t) = (At+B)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ $x(t) = Ate^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$, och $\dot{x} = A(1 - t\sqrt{\frac{k}{m}})e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$.

Vid vändpunkten har vi $\dot{x} = 0$, vilket inträffar vid $t = \sqrt{\frac{m}{k}}$. Där har vi alltså $x_d = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}e^{-1}$ vilket ger

$$\frac{x_d}{x_0} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.72} \approx .368$$

Tenta 2018-08-30 och OpenTA bonus uppgift

5. Ett homogent klot med massa m rullar utan glidning på ett på en kil med massa M och med öppningsvinkel α . Kilen i sin tur glider friktionsfritt mot ett horisontellt underlag. Klotets och kilens rörelse ligger i ett vertikalt plan. Lämpliga koordinat är x, läget som kilen förflyttat sig horisontellt på underlaget, och s, avståndet som klotet har rört sig längs kilen. Beräkna de bevarade storheterna, lämpligen genom att ställa upp och analysera Lagrange ekvationerna. Notera att klotet har tröghetsmoment $\frac{2}{5}mr^2$. Enbart ekvationerna när klotet rullar på kilen behöver analyseras. Vi ignorerar att den förr eller senere hamnar på underlaget.



Svar:

Läget av klotet i rymden är $\vec{R}_{klot}(t) = (x + s\cos\alpha)\hat{x} + s\sin\alpha\hat{y}$ och kinetiska energin totalt när vi också inkluderar kilen blir alltså

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{R}}_{klot})^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Vi kan omedelbart ta fram en bevarad storhet som är $E = T + V$

$$E = mgs\sin\alpha + \frac{1}{10}\left(7m\dot{s}^2 + 10m\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + 5(m+M)\dot{x}^2\right)$$

Den andra bevarade storheten är totala rörelsemängden i x-led, då inga netto krafter verkar horisontellt.

$$p_x = M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)$$

Därigenom fås svaren utan Lagrangian.

En mer formell väg till svar med Lagrangian blir

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{s}\sin\alpha)^2 + (\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\dot{s}^2 - mgs\sin\alpha$$

Vi kan läsa p_x från $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}$ och energin som

$$E = \dot{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} + \dot{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} - \mathcal{L}$$

Formelblad

Behåll detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\, \epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum (I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B)\cdot(C \times D) = (A\cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A\cdot C)(B\cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$ $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c*.*
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6);$ $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5).$
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB}$ $\qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}.$