Ordinarie tentamen i Mekanik 2 (FFM521)

Tid och plats: Fredagen den 7 juni 2019 klockan 08.30-12.30 Johanneberg.
Examinator: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

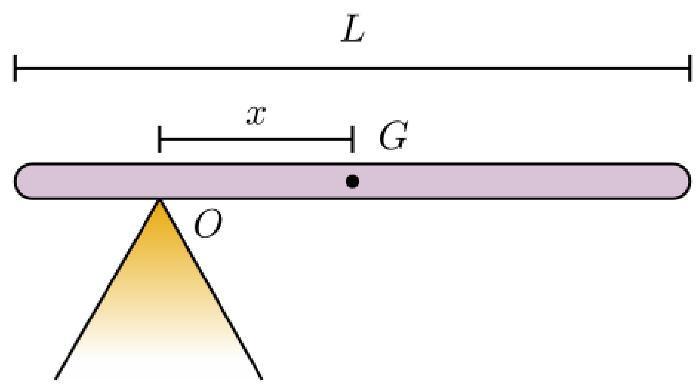
Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 eller 2 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 30 poäng på denna deltentamen. Betygsgränser till 3,4,5 är 10,17,25.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. En homogen, tunn stav av längd L startar i vila i horisontellt läge på en spets O med avstånd x från stavens masscentrum G enligt figuren. För det avbildade ögonblicket, bestäm vinkelaccelerationen α . Bestäm även $x_0 \geq 0$ för vilket $|\alpha|$ är maximalt. Tröghetsmomentet av staven runt dess masscentrum är $\frac{1}{12}mL^2$.



Svar:

$$(I_0 + mx^2)\ddot{\theta} = mgx$$

Genom att sätta $I_0 = \frac{1}{12}mL^2$ erhålles

$$\ddot{\theta} = \frac{gx}{\frac{1}{12}L^2 + x^2}$$

Detta leder till minimiseringsproblemet, efter irrelevanta faktorer faktoriseras bort:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{L^2 + 12x^2} = 0$$

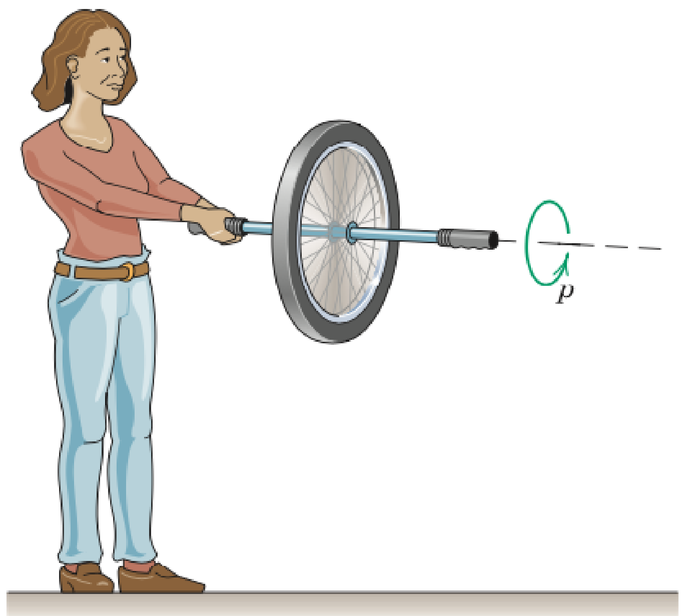
Vi får ekvationen

$$L^2 + 12x^2 = 24x^2$$

alltså $x = L\sqrt{\frac{1}{12}}$

från OpenTA

2. Personen i bilden håller hjulets lätta (dvs masslösa)axel och låter det stadigt precessera. Hjulets axel är hela tiden i horisontalplanet. Medan hjulet precesserar roterar hon sin kropp genom att bara röra fötterna så läget av den gemensamma tyngdpunkten förblir konstant. Projecerat i horisontalplanet är avståndet från hjulets masscentrum till det gemensamman masscentrum L. Längden mellan de två handtagen är $2D$ och vi antar att hjulet är symmetriskt monterat på axeln så hjulets masscentrum hamnar ett avstånd D från händerna. Hjulet har en massa M och tröghetsmoment mR^2 runt symmetriaxeln, med halva detta värde runt de andra huvudaxlarna. Med vilken kraft, i horisontal och vertikalled måste hon hålla i handtaget.



Svar:
Vi väljer $\hat{z}$ verikalt, och $\hat{x}$ längs horisontalaxeln. Vertikalkraften på axeln måste vara mg så hjulet inte faller. Eftersom kraftens angreppspunkt är D från hjulets masscentrum, blir momentet på axeln $mgD\hat{y}$. Eftersom axeln förblir horisontell blir $H = I_{\|}p\hat{x}+\Omega I_{\perp}\hat{z}$. och vi får

$$m = \Omega\ \hat{z} \times H = \Omega I_{\|}p\hat{y}$$

Vi ansätter $I_{\|} = mR^2$. och vi får därigenom

$$M_y = mgD = mR^2 p\Omega$$

Vi får därför precessionen

$$\Omega = \frac{gD}{pR^2}$$

Eftersom hjulet inte faller ner och axeln förblir horisontell måste personens rotation följa med precessionen *(se kommentaren nedan)* , och under antagandet att hon behåller sin ställning förutom att röra fötterna, (alternativt står stilla på en fritt roterande platta) blir centripetalaccellerationen av hjulets masscentrum $-m\Omega^2 L$ där L är avståndet i horisontalled till den gemensamma masscentrum. Denna kraft måste hon tillföra genom greppet. Därför blir

$$F_x = -m\Omega^2 L = -\frac{mg^2D^2L}{p^2R^4}$$

och som tidigare noterat har vi också

$$F_z = mg$$

Kommentarer om frågan är välformulerad utan att specificera personens rotation. Om personen skulle försöka forcera rörelsen genom att rotera snabbare än Ω skulle den då behöva get moment i $\hat{z}$ för att hålla axeln i samma riktning som armen. Axeln skulle då vridas upp eller ner från horisontalplanet. Om personen då skulle tvinga tillbaka axeln till horisontalplanet skulle denne behöva tillföra ett kraftpar med moment längs $\hat{y}$. Sådant moment anges ej i formuleringen av uppgiften och kan ej antagas utan en utförlig förklaring.

3. Man ser att amplituden hos en mycket lätt dämpad oscillator avtar med en faktor $1/e$ efter ett stort antal $n \gg 1$ svängningar. Bestäm kvoten mellan frekvensen av odämpade och dämpade svängningar i termer av n.

Svar:
Vi antar standard oscillator

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Vi får därför

$$-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$$

Vilket ger från PQ satsen:

$$\omega = \frac{-i\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv \frac{-i\gamma}{2} \pm \omega_D$$

Vi ser från detta att

$$4(\omega_0^2 - \omega_D^2) = \gamma^2$$

Efter en tid T vet vi att

$$x = Re(ae^{i\omega T}) = e^{-T\gamma/2} Re(ae^{i\omega_D T})$$

och från uppgiftsformuleringen vet vi att följande måste hålla vid tiden T efter n svängingar ägt rum och amplituden fallit med faktor e:

$$\begin{aligned} 2\pi n &= \omega_D T \\ 1 &= \gamma T/2 \end{aligned}$$

Vi finner alltså att

$$2\pi n = 2\omega_D/\gamma$$

och därigenom

$$\pi^2 n^2 \gamma^2 = \omega_D^2$$

Vi ersätter för γ^2 från ovan:

$$4\pi^2 n^2 (\omega_0^2 - \omega_D^2) = \omega_D^2$$

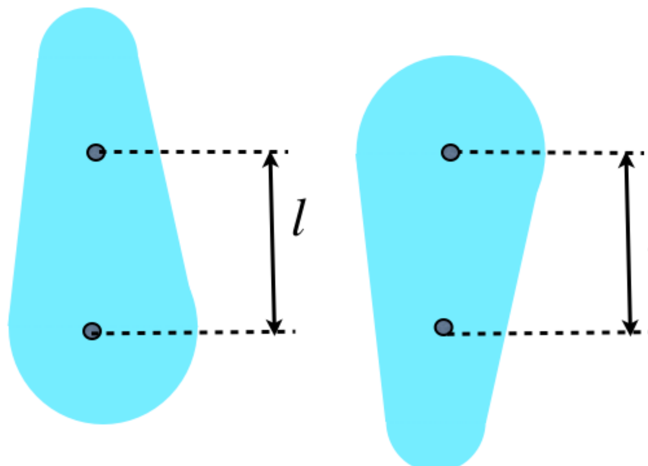
Vi får därigenom

$$\frac{\omega_D}{\omega_0} = \sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{1 + 4\pi^2 n^2}}$$

från OpenTA

4. En pendel av obestämd form har samma svängningsfrekvens ω runt två olika axlar som är avståndet l från varandra. Vi antar också att masscentrum ligger på linjen mellan de två upphängninspunkterna. Från värdet av l och ω bestäm g.

   Noggrant definiera ytterligare variabler ni kan behöva. Dock beror slutresultatet enbart på ω och l. En korrekt gissning utan motivation ger inga poäng.



Svar:
Vi definierar x_1 och x_2 som avståndet från masscentrum till vardera upphängninspunkt. Vi definierar I_0 som tröghetsmomentet runt masscentrum. Enligt Steiners sats får vi $(I_0 + mx_i^2)\ddot{\theta} = mgx_i \sin\theta$ dvs

$$\omega^2 = \frac{mgx_i}{I_0 + mx_i^2}$$

vilket görs om till

$$I_0 + mx_i^2 = \frac{mgx_i}{\omega^2}$$

Vi subtraherar formeln för x_2 från formeln för x_1 och dividerar med m för att få

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 - x_2^2 = \frac{g}{\omega^2}(x_1 - x_2)$$

Då en obestämd form saknar symmetri, antar vi att pendeln uppfyller $x_1 \neq x_2$ så vi kan faktorisera bort $x_1 - x_2$ och får $(x_2 + x_1) = \frac{g}{\omega^2}$. Eftersom $x_1 + x_2 = L$ får vi därigenom svaret

$$g = \omega^2 L$$

Lite märkligt och elegant result: svaret är oberoende detaljer såsom m, I_0 eller masscentrums verkliga läge. Bara avståndet mellan upphängningspunkterna samt ω behöver man veta för att få värde för g.

5. En partikel rör sig under inverkan av tyngdkraften på den rotationssymmetriska ytan $z = \kappa r$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ är avståndet från z-axeln. Använd Lagrangeformalism för att härleda systemets rörelseekvationer och bevarade storheter.

   Svar:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{h}^2 + \dot{\phi}^2 r^2) - mgh$$

   Nu ansätter vi $h = \kappa r$ för att få

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m((1+\kappa^2)\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 r^2) - mg\kappa r$$

   Vi ser att hela $\mathcal{L}$ är proportionell mot m, så vi kan dividera med m i $\mathcal{L}$. Då får vi ekvationen för $\ddot{r}$:

$$0 \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \;=\; (1+\kappa^2)\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + g\kappa$$

   Från ekvationen för $\dot{\phi}$ har vi, eftersom $\mathcal{L}$ inte beror på θ:

$$p_\theta = const = r^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}$$

   Vi kan ersätta denna constant i rörelsekvationen för $\dot{r}$:

$$0 \;=\; (1+\kappa^2)\ddot{r} - \frac{\dot{p_\theta}^2}{r^3} + g\kappa$$

   som tillsammans med föregående utgör rörelseekvationerna i termer av den bevarade storheten p_θ som är rörelsemängsmomentet (dividerat med m) runt z-axelen. Vi har också energibevaring $E_{tot} = T + V$. Inget avdrag om man glömt E_{tot}

   från Tenta 2014-08-26

Formelblad

Behålla detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\, \epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum(I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$ $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6);$ $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5).$
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB}$ $\qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}.$