Omtenta i Mekanik 2 (FFM521)

Tid och plats: 12 oktober 2018 klockan 08.30-12.30 Johanneberg.
Hjälpmedel: Matte Beta och miniräknare. **Examinator**: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1/2 eller 1 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 15 poäng på denna deltentamen. Halva delpoäng kan utdelas. För att bli godkänd krävs minst fem poäng. 13-15 poäng ger betyg 5, 9-12 poäng ger betyg 4, och 5-8 poäng ger betyg 3.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

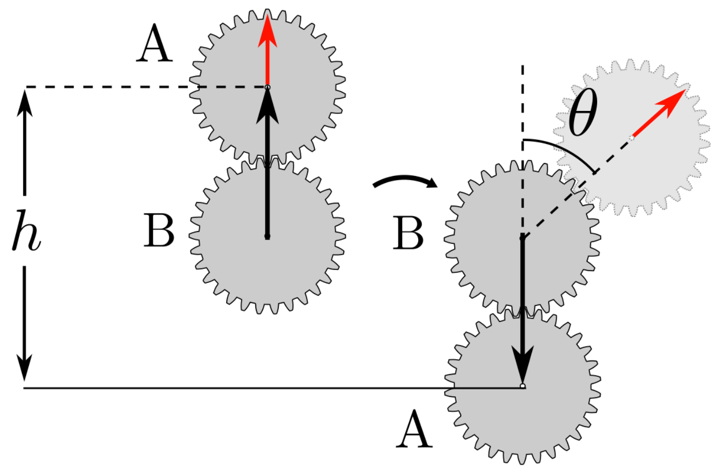
Lycka till!

1. *Baserat på "Klassiker"*

   Två platta kugghjul är sammanlänkade enligt diagrammet. Kugghjul 'B' hålls stilla och ickeroterande, och kugghjul A' roterar friktionsfritt runt den yttre axeln och rör sig på konstant radie. Approximera kugghjulen som platta skivor som har $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.

   Låt v_{free} vara hastigheten av masscentrum för kugghjul 'A' om den fallit fritt från första läget till det andra utan att kuggarna nuddar varandra. Låt $v_{connected}$ vara hastigheten av 'A's masscentrum om kuggarna är sammankopplade och 'A' rör sig enligt figur.

   Beräkna $v_{connected}/v_{free}$ vid $\theta = \pi$.



Svar: Låt $\dot{\varphi}$ vara rotationen på kugghjul A. I båda fallen är $\dot{\varphi} = \gamma\dot{\theta}$ då $\gamma = 0$ i det första fallet, och $\gamma = 2$ i det andra. Vi har i båda fallen

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2\gamma^2\dot{\theta}^2)$$

och $v_{cm} = 2R\dot{\theta}$. Vi får därför

$$gh = R\dot{\theta}^2(2 + \frac{\gamma^2}{4})$$

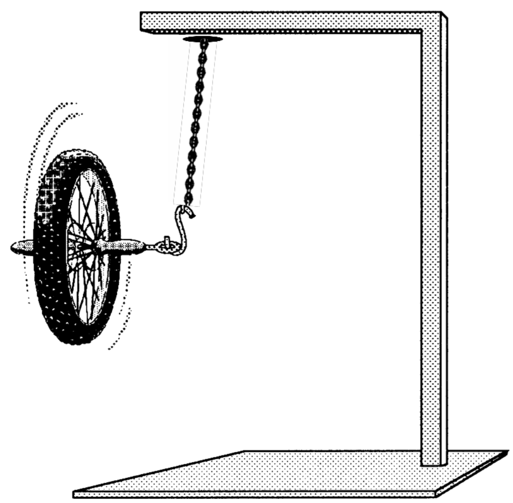
vilket ger

$$\frac{v_{connected}}{v_{free}} = \frac{\dot{\theta}_{\gamma=2}}{\dot{\theta}_{\gamma=0}} = \sqrt{\frac{2}{2+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Mycket vanligt på tentan var att man fick rätt svar med helt fel resonmang. Många skrev helt enkelt $\dot{\theta} = \omega$ och $KE_{connected} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ och därefter ansätte $\omega = v_{cm}/R$. Då blir slutsvaret rätt. Det felaktiga i resonmanget är att $\dot{\theta} = v_{cm}/(2R)$ och rotationen på kugg 'A' är $(2\dot{\theta})$. Dessa två misstag tar ut varandra och leder till korrekt svar dock med fel resonmang. Delpoäng gavs därför för korrekt de som fick rätt svar utan att ha presenterat ett korrekt resonemang.

2. Ett däck är upphängt enligt figuren. Däcket, som kan approximeras som en cylinder, har tröghetsmoment I_0 längs symmetriaxeln och $I_\perp$ längs de andra två axlarna. Däcket är i rotation med vinkelhastighet ω längs sin egen axel, och ses precessera runt den vertikala riktningen med konstant precessionshastighet Ω där $\Omega \ll \omega$ Vi antar att hjulet snurrar friktionsfritt runt sin egen axel men att friktion verkar vid kedjans upphängningspunkt. Vi observerar att vid det horisontella läget som visas, att vinkeln θ som bildas mellan axeln och horisontalplanet ändras långsamt så att $\dot{\theta} \neq 0$. Beräkna därifrån vridmomentet vid upphängninspunkten i termer av de angivna parametrarna.

   Precessionen leder till att kedjan inte hänger helt rakt; den lilla vinkeln kan vi försummas. Vi antar att däcket snurrar relativt snabbt och att eventuella termer såsom $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ och $\dot{\Omega}$ can försummas.



Svar: Vridmomentet vid upphängningspunkten ger bidrag $M_Z = \tau \hat{Z}$. Vi har

$$H = I_0 \omega \hat{x} + I_\perp \Omega \hat{z} + I_\perp \dot{\theta} \hat{y}$$

där kropps- och rumskoordinater sammanfaller i detta ögonblick. Precessionen är $(\Omega \hat{z} + \dot{\theta} \hat{y})$, och vridmomentet för en symmetrisk snurra blir därför

$$M = (\Omega \hat{z} + \dot{\theta} \hat{y}) \times H = \Omega \omega I_0 \hat{y} - I_0 \omega \dot{\theta} \hat{z}$$

Fästets vridmoment är i $\hat{z}$ led så vi får alltså

$$\tau = -I_0 \, \omega \, \dot{\theta}$$

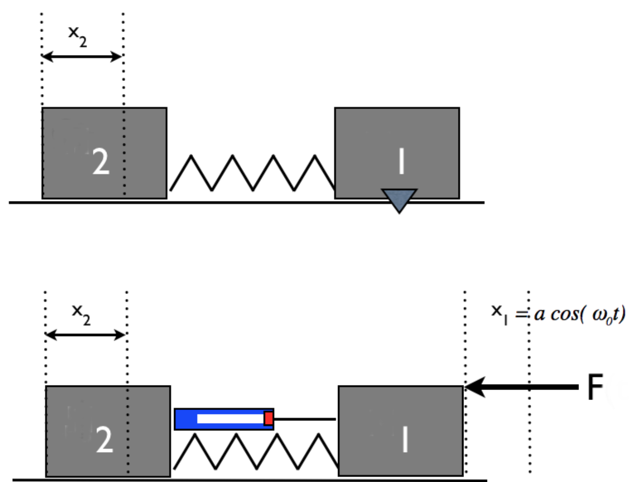
Vilket överensstämmer med att θ ökar dvs däcket faller och att τ verkar i motsatt riktning som Ω. Vi kan också avläsa $\Omega \omega I_0 = M_y = MgL$, vilket dock ej efterfrågas i denna uppgift.

3. Två experiment utförs på klossarna 1 och 2 i figuren, som var och en har massa M_1 och M_2. Det första experiment är att kloss '1' till höger sitter fast i underlaget och resonansfrekensen ω_0 av kloss 2 uppmäts. Man monterar sedan en stötdämpare med dämpningskonstant c mellan klossarna och driver kloss 1 fram och tillbaka vid denna frekvens så att $x_1(t) = a\cos\omega_0 t$. Under förutsättning att klossarna rör sig friktionsfritt på underlaget, och att man väntar till bygynnelsevillkoren dämpas bort, är uppgiften att beräkna det totala arbetet som stötdämparna utför under en cykel. Förenkla svaret genom att ersätta ω_0 med dess värde i termer av lämpliga angivna parametrar.

   Ni kan behöva integralen

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t \; dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t \; dt = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}$$

   Om beräkningen av arbetet verkar oöverkomlig, kan totalt ett poäng tilldelas på uppgiften genom enbart ett helt korrekt uttryck för $x_2(t)$.



Svar:

$$M_2\ddot{x_2} = c(\dot{x_1} - \dot{x_2}) + k(x_1 - x_2)$$

Vi arrangerar om och ansätter $x_2 = be^{i\omega_0}$ och $x_1 = ae^{i\omega_0}$

$$-M_2\omega_0^2 b + icb\omega_0 + kb = cia\omega_0 + ka$$

Nu har vi resonansvillkoret att $M_2\omega_0^2 = k$ så vi finner

$$b = (1 + \frac{k}{ic\omega_0})a$$

Arbetet ges av kraften gånger stötdämparens utsträckning, så arbetet per tidsenhet, dvs effekt blir

$$W = c(\dot{x_1} - \dot{x_2})^2$$

Vi ser att

$$x_1 - x_2 = Re\,(\frac{k}{ic\omega_0} ae^{i\omega_0 t})$$

och att

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = Re\,(\frac{k}{c} ae^{i\omega_0 t})$$

så att

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \cos{(\omega_0 t)}\,\frac{ak}{c}$$

Arbetet som utförs av stötdämpare per tidsenhet blir alltså

$$W = a^2\cos^2{(\omega_0 t)}\frac{k^2}{c} = a^2\cos^2{(\omega_0 t)}\,\frac{k^2}{c}$$

som i snitt under en hel cykel blir

$$\langle W \rangle = \frac{a^2 k^2}{2c}$$

och under en hel cykel

$$\Delta_E = \frac{\pi}{\omega_0}\,\frac{a^2 k^2}{c} = \frac{\pi a^2 k^{\frac{3}{2}} M_2^{\frac{1}{2}}}{c} =$$

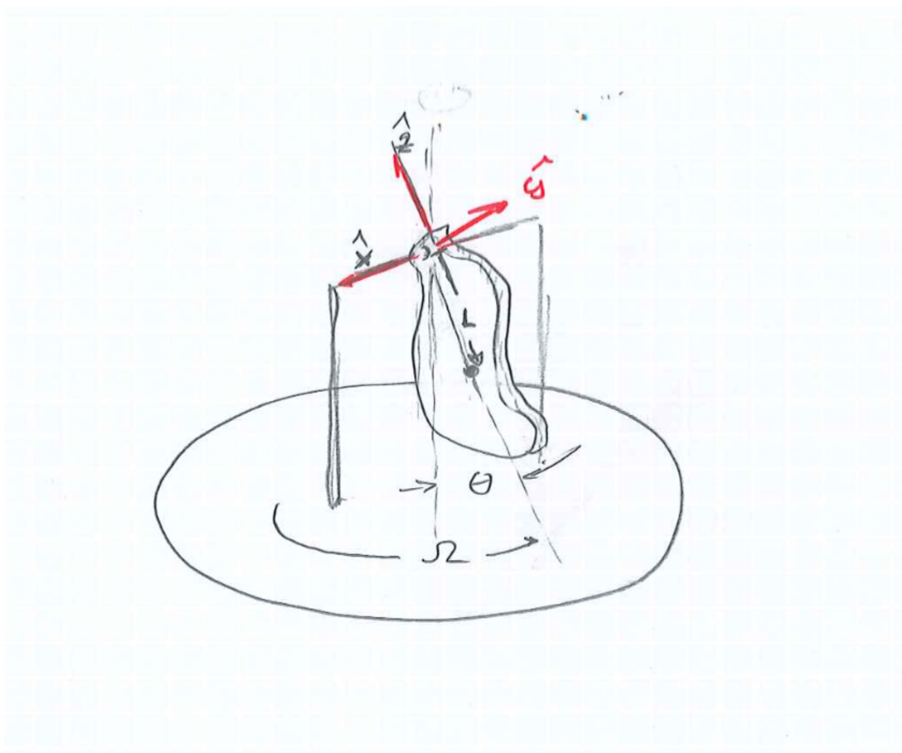
Ett alternativ som ger 1p var räkna enbart $x_2(t)$ som är en standardräkning av denna typ. Svaret enligt ovan blir

$$x_2(t) = Re\,a(1 + \frac{k}{ic\omega_0})e^{i\omega_0 t} = a(\cos{(\omega_0 t)} + \frac{k}{\omega_0 c}\sin{(\omega_0 t)})$$

4. En oregelbunden massa är upphängd på och roterar fritt runt genom en axel som definierar $\hat{x}$ led. Denna axel är monterad på en skiva som roterar med konstant vinkelhastiget Ω runt en axel mot gravitationens riktning som också definierar $\hat{Z}$. Masscentrum är ett avstånd L från axeln och vinkeln mellan $\hat{Z}$ och vektorn $\hat{z}$ som är vektorn från kroppens mass centrum till axeln, är θ. Vi antar att kroppens huvudaxlar är riktade längs $\hat{x}$, $\hat{y}$ och $\hat{z}$ och runt dessa är tröghetsmomenten $I_1 = \kappa_1 mL^2$, $I_2 = \kappa_2 mL^2$ och $I_3 = \kappa_3 mL^2$ runt masscentrum.

   Beräkna en ekvation för $\ddot{\theta}$.

   En helt korrekt lösning för specialfallet där massan ersätts av en punktmassa ger 1p på uppgiften.



Svar: En liknande uppgift, där dock massan roterar runt sitt masscentrum har förekommit på en tidigare tenta. Med gravitation har vi

$$H = mL^2[(\kappa_1 + 1)\dot{\theta}, -(\kappa_2 + 1)\Omega \sin\theta, \kappa_3\,\Omega\cos\theta]$$

$$M = \frac{\partial H}{\partial t} + [0, -\Omega\sin\theta, \Omega\cos\theta] \times H$$

Vi behöver bara M_x vilket måste bli $-mgL\sin\theta$ så vi får

$$-mgL\sin\theta \equiv mL^2\left((\kappa_1 + 1)\ddot{\theta} + (\kappa_2 + \kappa_3 + 1)\Omega^2 \sin\theta\cos\theta\right)$$

Om vi förenklar uppgiften och ansätter en punktmassa blir $\kappa_i = 0$ och vi får

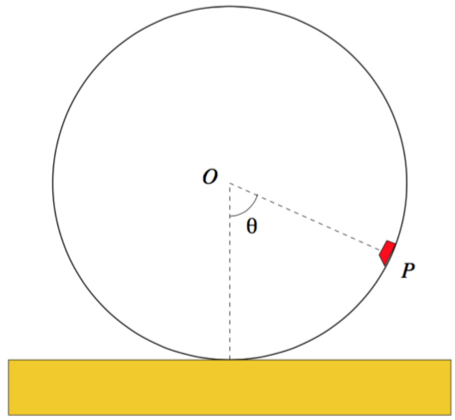
$$-mgL\sin(\theta) = mL^2(\ddot{\theta} + \Omega^2\sin\theta\cos\theta)$$

vilket sedan blir

$$\ddot{\theta} = \sin\theta(-g + \Omega^2 L\cos\theta)/L$$

Man ser att till det återställande momentet från gravitationen tillkommer ett motsatt bidrag från centrifugalkraften. Denna enklare ekvation kan i princip härledas utan att man behöver använda tröghetsmoment utan bara använder $F = ma$ där man inkluderar fiktiva krafter i F. Enbart denna uträkning ger 1p.

5. En cylinder med massa M och radie R rullar utan att glida på en horisontell yta. Cylindern har tröghetsmomentet $I_0 = MR^2$. Inuti cylindern glider friktionsfritt en liten kloss med massa m markerat med P i diagrammet. Systemet börjar i vila med vinkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$ då klossen släpps. Beräkna hur långt cylinderns centrum har förflyttats när klossen passerar $\theta = 0$. *Valfri metod är tillåten att använda, men enklast blir nog med hjälp av Lagrangian.*



Svar: Låt x vara läget av cylinders mass centrum relativt startläge. Vi noterar Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,2M(\dot{x}^2) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}R\cos(\theta) + R^2\dot{\theta}^2\right) + mR\cos\theta$$

där faktorn 2 framför M kommer från summan av rotation och translation. ($\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$ $I = MR^2$.) Vi noterar att Lagrangian inte innehåller variabeln x själv. Vi får därför

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = konstant$$

och utvecklar detta till

$$(2M+m)\dot{x} + m\dot{\theta}R\cos(\theta) = 0$$

Vi kan skriva om detta som

$$(2M+m)\frac{dx}{dt} = -mR\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Genom att multiplicera med dt får vi

$$(2M+m)\ dx = -Rm\cos(\theta)\ d\theta$$

Vi integerar från $\theta = \pi/2$ till 0 och x från 0 till X och får

$$(2M+m)x = mR$$

och därigenom

$$X = \frac{m}{2M+m}R$$

Formelblad

Behålla detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\,\epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum(I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p,q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin{(a+b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.