Omtenta i Mekanik 2 (FFM521)

Tid och plats: 30 augusti 2018 klockan 08.30-12.30 Johanneberg.
Hjälpmedel: Matte Beta och miniräknare. **Examinator**: Stellan Östlund
Jour: Stellan Östlund, tel. 0767619006, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 11.30

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift ges max 3 poäng enligt följande principer:

- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1/2 eller 1 poäng avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgrunder: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 15 poäng på denna deltentamen. Halva delpoäng kan utdelas. För att bli godkänd krävs minst fem poäng. 13-15 poäng ger betyg 5, 9-12 poäng ger betyg 4, och 5-8 poäng ger betyg 3.

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

1. *Baserat på "Klassiker"* En boll placeras på ett lutande plan som lutar med vinkel θ. Bestäm den minimala friktionskoefficient μ för att bollen ska rulla utan att glida. Bollen har tröghetsmoment $\frac{2}{3}mr^2$. *Notera avvikelsen från OpenTA, föremålet var en kula som har ett annat tröghetsmoment.* Svar: Notera att $F_\perp = N = mg\cos\theta$ and $F_\parallel = ma = mg\sin\theta - F_{friction}$

   Vi använder att $F_{friction} = \mu N$ varvid vi finner

$$ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

   Vi behöver relatera a till $\ddot{\theta}$:

$$I\ddot{\theta} = F_\parallel R = \mu mg\cos\theta R$$

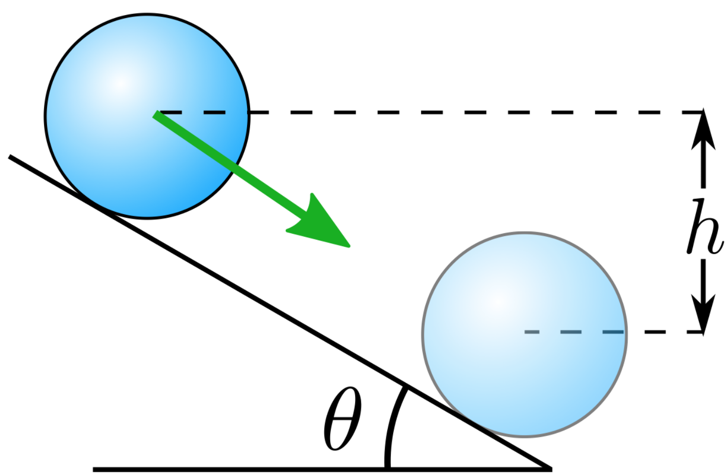
   Vi tar kvoten mellan dessa två ekvationerna

$$\frac{2/3mR^2\ddot{\theta}}{ma} = \frac{\mu mg\cos\theta R}{mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}$$

   och använder oss av $\ddot{\theta}R = a$ varvid fås

$$\frac{2}{3} = \frac{\mu\cos\theta}{\sin\theta - \mu\cos\theta}$$

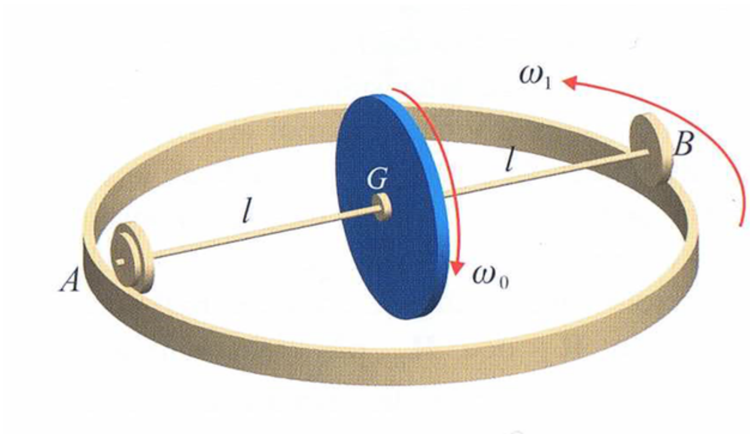
   Vi löser ut μ och får $\mu_{crit} = \frac{2}{5}\tan\theta$



2. Ett homogent svänghjul roterar fritt runt axeln AB, som i sin tur är monterad på två små hjul som rullar fritt på det runda spåret. Svänghjulet roterar med vinkelhastighet ω_0 runt sin egen axel, och axeln AB roterar med vinkelhastiget ω_1 runt på spåret. Svänghjulet har radie R och radien av spåret är l. Givet en vinkelhastighet ω_1, vid vilken vinkelhastiget ω_0 kommer ena hjulet lätta från spåret. Bortse från de små hjulens tröghetsmoment. Svänghjulet har huvudtröghetsmoment $\frac{1}{2}mR^2$ och $\frac{1}{4}mR^2$

   (a) Under förutsättning ω_1 och ω_0 är positiva, vilken sida, A eller B, lättar?

   (b) Bestäm ω_0 för vilket ena hjulet lättar från spåret.



Svar:

$$H = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}\omega_1 \end{bmatrix}$$

$$M = \vec{\omega_1} \times H = mR^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}\omega_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} mR^2 \omega_1 \omega_0 \hat{x}$$

När sidan B lättar har vi $F_A = mg$ vilket ger $M = lmg\hat{x}$ så vi får

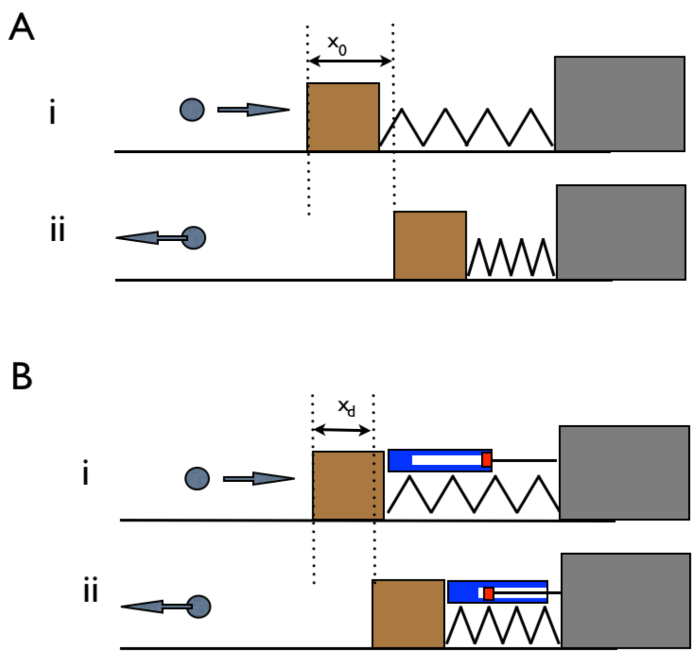
$$\omega_1 = \frac{2gl}{r^2 \omega_0}$$

3. Den gråa klossen till höger är fast monterad i underlaget. Den mindre bruna klossen är fäst i en fjäder och glider friktionsfritt på underlaget. Antag att som i figur A, den bruna, initialt stillastående, klossen träffas av en kula som inte fastnar i klossen. Klossen rör sig därefter till x_0 innan den vänder vid ett maxavstånd x_0.

   Man monterar sedan en stötdämpare, anpassad så att systemet är kritiskt dämpat när man använder samma kloss och fjäder, och och gör därefter om experimentet. Nu blir max amplituden x_d när den dämpade klossen vänder.

   Definiera egna variabler som kan vara nödvändiga, t.ex. fjäderkonstant, massor av kloss och kula, dämpningskonstant, hastighet hos kulan.

   (a) Beräkna x_d/x_0



Svar:

Odämpade resp. dämpade ekvationer är

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

När man ansätter $x = ae^{i\omega}$ blir karaktäristiska ekvationen för ω

$$-m\omega^2 + ic\omega + k = 0$$

För det odämpade fallet får vi med begynnelsevillkor $x(0) = 0$, lösningen $x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \frac{k}{m}t$, så att amplituden $x_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$

I det dämpade fallet, har vi villkoret att systemet ska vara kritiskt dämpat, att den karaktäristiska ekvationen har en degenerad rot. Detta för att kunna få en polynom i t som en faktor i lösningen. Vi får

$$\omega^2 - ic\omega/m - \frac{k}{m} = (\omega - i\sqrt{\frac{k}{m}})^2$$

därmed $c = 2\sqrt{km}$. Lösningarna i detta fall är $x(t) = (At + B)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ men då vi söker $x(t = 0) = 0$ har vi $B = 0$. Då får vi $x(t) = Ate^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$, och $\dot{x} = A(1 - t\sqrt{\frac{k}{m}})e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$.

Vid vändpunkten har vi $\dot{x} = 0$, vilket inträffar vid $t = \sqrt{\frac{m}{k}}$. Där har vi alltså $x_d = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}e^{-1}$ vilket ger

$$\frac{x_d}{x_0} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.72} \approx .368$$

4. Vi definierar Ω som vinkelhastigheten av jordens rotation kring sin egen axel. En kula släpps från en höjd h från en byggnad belägen på latitud θ. En lodlinje till marken (dvs. en vikt i ändan på ett långt snöre) från kulans startpunkt definierar z-led och origo. Beräkna avvikelsen i nedslagspunkten från origo i lägsta ordning Ω som ger ett icke-noll resultat. *Ledtråd: hastigheten i z-led approximeras som opåverkad av corioliskraften i denna approximation.* Svar: Vi har $\dot{v_z} = -g$ så vi har $v_z(t) = -gt$ i lägsta ordning. I x-led (öst) och y-led (norr) har vi i lägsta ordning

$$\dot{\vec{v}} = -g\hat{z} - 2\Omega(\sin\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \times (v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z})$$

Vi får därmed

$$\begin{aligned} \dot{v_x} &= -2\Omega\sin\theta v_z \\ \dot{v_y} &= +2\Omega\cos\theta v_x \\ \dot{v_z} &= -g \end{aligned}$$

Vi har direkt $v_z = -gt$ och har då diffrentialekvationen för v_x som

$$\dot{v_x} = 2\Omega\sin\theta gt$$

varvid vi får

$$v_x = \Omega\sin\theta gt^2$$

som kan integreras en gång till för att få

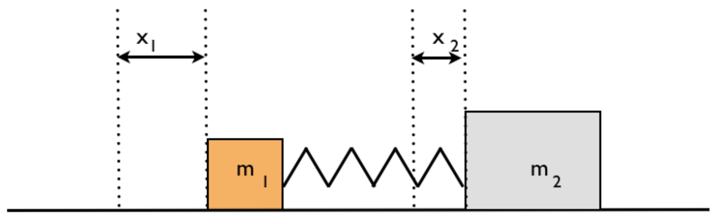
$$x(t) = \frac{1}{3}\Omega\sin\theta gt^3$$

Vi har sedan att $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ så vi får

$$x = \frac{1}{3}\Omega\sin\theta g\frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{3}\Omega\sin\theta\sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

Avvikelsen i norr-söder är noll till denna ordning då den innehåller termen Ωv_x.

5. Två klossar med massa m_1 och m_2 är sammankopplade med en fjäder med fjäderkonstant k. Läget i vila betecknas med $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$. Klossarna är i vila vid $t = 0$, då enbart den vänstra klossen får en stöt så att den får en hastiget v_i. till höger. Med valfri metod, beräkna $x_1(t)$ och $x_2(t)$.



Svar:

Lättast blir Lagrangian metoden.

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

Vi får då Lagrange ekvationerna

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Genom att ansätta $x_j = a_j e^{i\omega t}$ får vi seklära ekvationerna

$$\begin{bmatrix} k - m_1\omega^2 & k \\ k & k - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi begär en lösning genom att begära determinanten av matrisen ovan ska bli noll. Vi får

$$\omega^2 = \begin{cases} 0 \\ k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \end{cases}$$

Vi får två egenvektorer. Den ena, för $\omega = 0$ blir $[1, 1]$ vilket motsvarar constant hastighet av båda klossarna. Den andra lösningen blir, efter lite arbete att hitta egenvektorer $[m_2, -m_1]$. En kvalifiserad gissning kunde ge detta omedelbart då det lämnar mass centrum oberörd. Vi betecknar härefter den icke-noll lösning som ω. Vi får alltså den allmäna lösningen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (A + Bt) + \begin{bmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{bmatrix} (C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$$

Begynnelsvillkoret att klossarna är stillastående ger $A = 0$ och $C = 0$. Randivillkoret att hastigheterna är korrekt blir

$$\begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Dm_2\omega \\ -Dm_1\omega \end{bmatrix}$$

Vi får alltså att $B = Dm_1\omega$ och att $v_i = D(m_1 + m_2)\omega$ och får därigenom $D = \frac{v_i}{\omega(m_1+m_2)}$ och $B = \frac{v_i m_1}{m_1+m_2}$. Det ger slutligen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{v_i}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} m_1 t + \frac{m_2}{\omega}\sin\omega t \\ m_1 t - \frac{m_1}{\omega}\sin\omega t \end{bmatrix}$$

En bra kontroll är att totala rörelsemängden är konstant:

$$G_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 = \frac{v_i}{m_1 + m_2}((m_1^2 + m_1 m_2)t + (m_1 m_2 - m_2 m_1)\cos\omega t)$$

Vilket förenklas till $= v_i m_1$ som det borde.

Lycka till!

Formelblad

Behålla detta formelblad för andra delen av tentan

- $R_\Omega(\theta)_{ij} = \delta_{i,j} cos(\theta) + (1 - cos(\theta))\Omega_i\Omega_j - sin(\theta)\, \epsilon_{ijk}\Omega_k$
- $Tr(R_{\hat{\Omega}})(\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$
- $\Sigma\ \epsilon_{kij}\ \left(R_{\hat{\Omega}}(\theta)\right)_{ij} = -2\sin(\theta)\hat{\Omega}_k$
- $I_{ij} = \sum_{\vec{r}} m_{\vec{r}}(\delta_{ij}(\vec{r})^2 - \vec{r}_i\vec{r}_j)$
- $(I_{tot})_{ij} = \sum (I_{cm})_{ij} + M\,(R^2\delta_{ij} - R_iR_j)$
- *(MK 7/6)* $v_A = v_B + \omega \times r + v_{rel}$
- *(MK 7/6)* $a_A = a_B + \dot{\Omega} \times r_{A/B} + 2\Omega \times v_{rel} + \Omega \times (\Omega \times r_{A/B}) + a_{rel}$
- *(MK 7/7,7/7a)* $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Omega \times A$
- $0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$
- $p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$
- $H(p, q) = p\dot{q} - \mathscr{L}$
- $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
- $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$
- $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{i,m}\delta_{j,n} - \delta_{i,n}\delta_{j,m}$
- $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)\ (B \cdot D\ ) -\ (A \cdot C)(B \cdot C)$
- $\cos{(a + b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin{(a + b)} = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
- $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ *där* A, B *och* C *är längden av sidorna mittemot vinkeln* a, b *och* c.
- $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$; $\qquad \sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + O(\theta^5)$.
- $|\vec{A} \times \vec{B}| = |A|\,|B|\,\sin\theta_{AB} \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |A|\,|B|\,\cos\theta_{AB}$.